

De matematiska förmågorna

Kristina Juter, Högskolan Kristianstad

Arbetet med matematiska förmågor är ett fält i snabb utveckling inom svensk matematikdidaktik och internationellt. Det förekommer många olika beskrivningar av matematisk kunskap i styrdokument för skolämnet matematik och publikationer gällande matematikundervisning. Skolinspektionen (2010) tar upp benämningarna: processmål, förmågemål och kompetensmål som synonymer för att beskriva strävansmål i matematiken. De sex kompetensmål i matematik som beskrivs i rapporten är problemlösning, resonemang, procedurhantering, representation, samband och kommunikation. Det går naturligtvis att dela in matematisk kompetens eller förmåga på andra sätt än de som beskrivs här. I kursplanen för matematik i gymnasieskolan tar man upp sju förmågor: begrepps förmåga, procedurförmåga, problemlösningsförmåga, modelleringsförmåga, resonemangsförmåga, kommunikationsförmåga och relevansförmåga (Skolverket, 2011).

Kursplanens formulering av dessa förmågor har sin bakgrund i ett internationellt arbete om vad som utmärker en matematisk grundkompetens. Där har bland annat ett danskt läroplansprojekt (KOM-projektet) bidragit till utvecklingsarbetet (Niss & Højgaard, 2011). De kompetenser som man urskilt i detta arbete representerar olika aspekter av en helhet.

Nedan presenteras de sju förmågorna från kursplanen kort. Skolverkets och vår presentation förutsätter ingen hierarkisk eller linjär ordning på förmågorna. De avspeglar olika egenskaper av matematiskt kunnande. Förmågorna överlappar och lyfter varandra när de utvecklas. Det är bara i pedagogiskt syfte som man hanterar dem en i taget. Vi börjar vår presentation av förmågorna med problemlösningsförmågan eftersom problemlösning är centralt för utvecklingen av det matematiska tänkandet.

Problemlösningsförmåga är ”en av de stora utmaningarna i matematikdidaktiken” (Skott et. al., 2010, s. 247) men samtidigt grunden för en stor del av matematisk utveckling. Här kan man se två aspekter av problemlösning, en som redskap för att nå målet att lära sig matematik och en som mål för att lära sig att lösa problem. Ett matematiskt problem uppstår när problemlösaren inte på förhand har en metod för att lösa problemet. Olika strategier för att komma igång och ta sig igenom problemet krävs här. Att kunna variera de egna representationerna av matematiska begrepp och generalisera tidigare problemlösningserfarenheter ger fler möjligheter för elever att klara av olika typer av problem.

Begrepps förmåga inrymmer förmågan att beskriva begrepp utifrån definitioner och begreppens egenskaper. Förståelse av förhållanden mellan begrepp som till exempel mellan den naturliga logaritmen och potenser av e ryms också inom denna förmåga. Eleverna ska kunna använda begreppen i beräkningar och problemlösning och känna till olika representationer av dem beroende på sammanhang. Beträffande begreppet linjär ekvation innebär begrepps-

förmåga till exempel att eleverna kan förklara vad det är som utmärker linjäritet och vad k och m står för i den algebraiska representationen $y = kx + m$. Eleverna kan också representera linjen grafiskt och se relationen mellan den grafiska och den algebraiska representationen.

Procedurförmåga handlar om att eleverna kan utföra procedurer, till exempel derivera elementära funktioner, tillämpa algoritmer och lösa olika rutinuppgifter, med eller utan hjälpmedel. Det innebär också att eleverna klarar av att välja vilken procedur de ska använda i en given situation. Något som först uppfattas som ett problem kan i senare skede övergå till att bli en rutinuppgift, när eleverna utvecklat sin förmåga att hantera situationen.

Modelleringsförmåga har man om man kan beskriva en händelse eller ett samband från verkligheten eller en fiktiv händelse med en matematisk modell. Beskrivningen kräver en analys av situationen i fråga och att modellens begränsningar tas i beaktande. Modellering kan vara sammankopplad med problemlösning, då man ofta utifrån ett verkligt scenario skapar en modell för att kunna lösa ett problem som är kopplat till scenariot. Utvecklingen av modelleringsförmåga innebär också förmåga att utvärdera och kritiskt granska modeller, tolka resultat och inse att modeller vanligtvis innebär förenklingar av verkligheten. Det finns många områden där matematisk modellering används, till exempel inom ekonomi, naturvetenskap och teknik.

Resonemangsförmåga innefattar förmågan att driva en matematisk argumentation med hjälp av begrepp och procedurer till exempel i problemlösningssituationer. Resonemang förs på olika vis genom förklaring, slutledning, bevisföring och andra typer av logisk härledning. Resonemang är också en viktig del av problemlösning och bevisföring. Ett exempel är att argumentera varför summan av två udda tal är jämn genom att skriva två udda tal a och b som $a = 2m + 1$ respektive $b = 2n + 1$ (m och n är heltal) och sen addera. Vi får då $a + b = 2m + 2n + 2 = 2(m + n + 1)$ som är ett jämnt tal eftersom det är ett heltal multiplicerat med 2.

Kommunikationsförmåga i matematik innefattar att kunna använda symboler, grafer, matematiska termer, ord, bilder, modeller och andra representationer för att kommunicera med utgångspunkt i den situation man befinner sig. Det kan vara en laborationsrapport eller statistisk undersökning som ska beskrivas, men det kan också vara en helt inom-matematisk situation som lösningen till en ekvation som kommuniceras. Vi belyser två olika sätt att kommunicera genom att presentera lösningen till följande problem: *Ett paket väger 5 kg plus halva sin vikt. Hur mycket väger paketet?* Ett sätt är att använda matematisk notation i en ekvation: $5 + \frac{x}{2} = x$ så $10 + x = 2x$ och vi har $x = 10$ kg där x är paketets vikt. Ett annat sätt är att använda ord i situationen för problemet: 5 kg plus halva vikten ger hela vikten. Då måste 5 kg vara halva vikten eftersom en halv plus en halv ger en hel. Här kan vi även se hur olika resonemang kan generera olika kommunikationsformer. Kommunikation handlar också om att organisera och befästa det egna tänkandet och redogöra för det inför andra; ta emot, förstå andras uttryck och kunna utbyta tankar om och inom matematik. Kommunikationen kan vara både muntlig och skriftlig.

Relevansförmåga innefattar att kunna se matematikens roll i ett sammanhang, till exempel i andra ämnen och i verkliga situationer. Det kan röra sig om matematiken inom ekonomiska, samhällsvetenskapliga, tekniska och naturvetenskapliga frågor. Modellering är ett sätt att visa på matematikens relevans i olika kontexter och kan motivera elever att arbeta med skolmatematik.

Förmågorna har en komplex och multidimensionell relation till varandra. God begreppsförmåga och resonemangsförmåga stärker även problemlösningsförmågan och modelleringsförmågan. För att fokusera på olika förmågor ska vi nu se hur en ursprunglig uppgift kan generera andra typer av uppgifter. Uppgift 1 nedan kräver i huvudsak procedurförmåga.

Uppgift 1: Lös ekvationen $\frac{4}{x} = 12$

Om vi vill komma åt fler förmågor men träna samma matematiska område kan vi skriva om uppgiften. Här är fyra exempel på omformuleringar:

I uppgift 1a är problemet vänt så att eleverna ska få tillfälle att använda sina problemlösningsförmågor och modelleringsförmågor. Även de andra förmågorna spelar roll här.

Uppgift 1a: Du har 4 pajer som ska delas och läggas upp på tallrikar till dig och dina 11 gäster. Hur stor del av en paj får var och en om alla ska få lika stora bitar? Presentera minst två olika sätt att lösa uppgiften på.

I uppgift 1b har vi istället satt fokus på kommunikationsförmågan och procedurförmågan.

Uppgift 1b: Förklara med ord för en klasskompis hur du löser ekvationen $\frac{4}{x} = 12$.

Uppgift 1c är öppen i sin utformning och sätter modelleringsförmågan och relevansförmågan i centrum.

Uppgift 1c: Formulera en situation som leder till beräkningen $\frac{4}{x} = 12$. Lös därefter ekvationen.

Uppgift 1d ställer krav på elevernas begreppsförmåga om variabler och konstanter.

Uppgift 1d: $\frac{a}{x} = 12$. Vad ska a ha för värde för att ekvationen ska ha lösningen $x = \frac{1}{3}$?

Vi kommer att närmare ta upp utveckling av förmågorna i modulens del 7.

Referenser

Niss, M. & Højgaard, T. (2011). Competencies and Mathematical Learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark. IMFUFA, Roskilde University, Denmark. English edition.

http://pure.au.dk/portal/files/41669781/THJ11_MN_KOM_in_english.pdf

Skolinspektionen (2010).

<http://www.skolinspektionen.se/Documents/Kvalitetsgranskning/matte-gymnasie/kvalgr-magy2-slutrapport.pdf>. Hämtad 2013-05-24

Skolverket (2011). <http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat?tos=gy&subjectCode=MAT&lang=sv>

Hämtad 2013-09-22

Skott, J., Hansen, H.C., Jess, K., & Schou, J. (2010). Matematik för lärare. Y. Grundbok. Bd 1. Malmö: Gleerups Utbildning.