Delprov B	Uppgift 1–11. Endast svar krävs.
Delprov C	Uppgift 12–17. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter för Delprov B och Delprov C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 68 poäng varav 24 E-, 25 C- och 19 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 18 poäng
D: 27 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 35 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 45 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 54 poäng varav 11 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: ______________________________

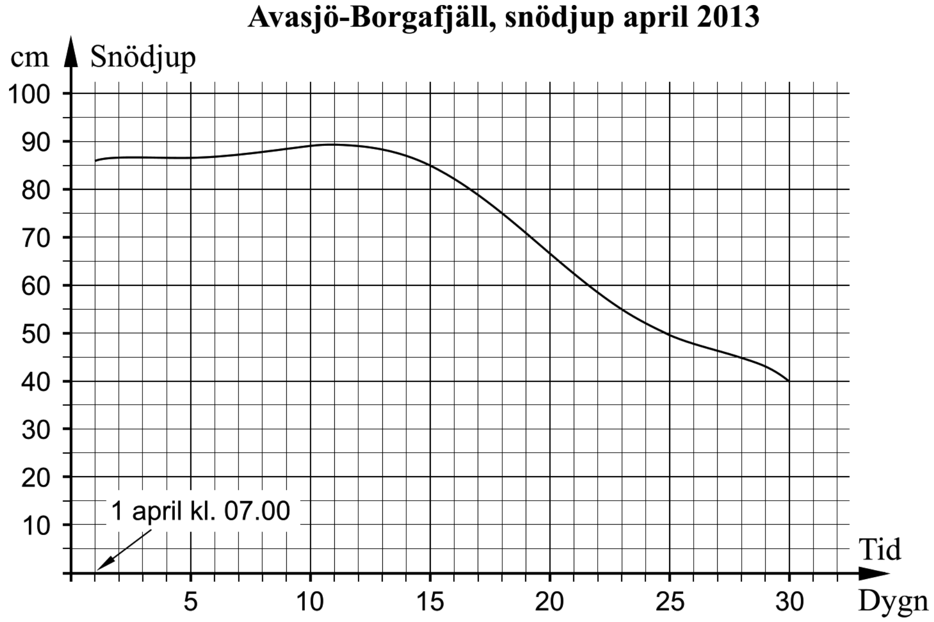
Födelsedatum: ______________________________

Gymnasieprogram/Komvux: ______________________________

Delprov B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs*. Skriv dina svar direkt i provhäftet.

1. Ange graden för polynomet $x^5 + 7x^4 + 3x - 8$ _______________________ (1/0/0)

2. Avasjö-Borgafjäll är en observationsstation där SMHI samlar väderdata. Diagrammet visar hur snödjupet (i cm) varierar under en månad med start den 1 april 2013 kl. 07.00.



Besvara följande uppgifter med hjälp av diagrammet.

a) Med vilken genomsnittlig förändringshastighet i cm/dygn minskar snödjupet under perioden 15 april kl. 07.00 till 30 april kl. 07.00? _______________________ (1/0/0)

b) Bestäm förändringshastigheten i cm/dygn för snödjupet den 11 april kl. 07.00. _______________________ (1/0/0)

c) När minskar snödjupet som snabbast? Välj ett av alternativen A–E.

A. 1 april
B. 11 april
C. 14 april
D. 20 april
E. 28 april _______________________ (1/0/0)

3. För vilket värde på x är uttrycket $\dfrac{2x+10}{3x-6}$
inte definierat? ____________________ (1/0/0)

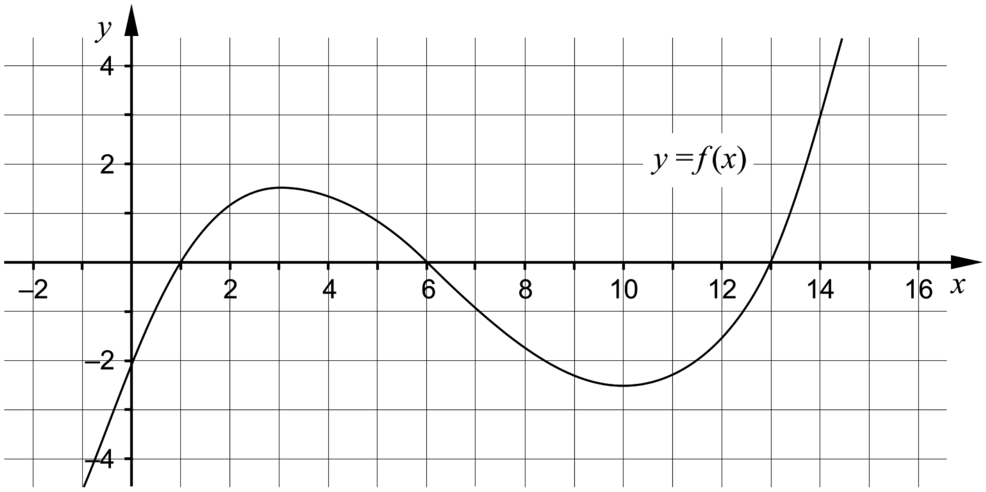
4. Förenkla $x^2(x^3+9)-(3x)^2$ så långt som möjligt. ____________________ (1/0/0)

5. Bestäm $f'(x)$ om

a) $f(x)=3x^4+x^2-5$ $f'(x)=$ ____________________ (1/0/0)

b) $f(x)=\dfrac{kx-1}{4}$ $f'(x)=$ ____________________ (0/1/0)

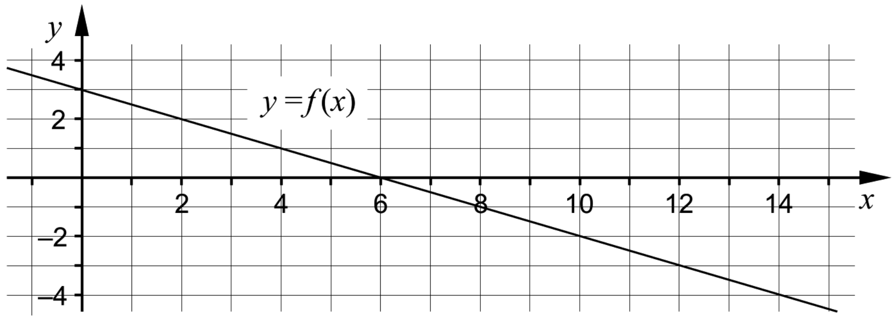
6. Figuren visar grafen till tredjegradsfunktionen f.



a) Avläs i figuren och ange derivatans nollställen. ____________________ (1/0/0)

b) För en annan funktion g gäller att $g(x)=-f(x)$.
Markera punkterna $A=(1, g(1))$, $B=(3, g(3))$ och $C=(14, g(14))$
i figuren. (0/1/0)

7. Grafen till funktionen f är en rät linje, se figur.



Bestäm den övre integrationsgränsen a där $a \neq 0$

så att $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = 0$ ______________________ (0/1/0)

8. Funktionen f beskriver antalet invånare i en kommun som funktion av tiden t, där t är tiden i år efter 1 januari 2013.

I figuren finns fyra tomma rutor. Skriv in de tal och symboler i rutorna som medför att tolkningen av likheten blir:

Under tidsperioden 1 januari 2015 till 1 januari 2020 ökar antalet invånare med 45 107 i kommunen.

$$\int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{}\,\mathrm{d}t = \boxed{}$$

(0/1/1)

9. Bestäm $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln e^x + xe^x}{5x}$ ______________________ (0/0/1)

10. Bestäm lösningarna till ekvationen

$\dfrac{(x-5)^4 - (x-5)^3}{x-10} = 0$ ______________________ (0/0/1)

11. Derivatan till $f(x) = \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{x}$ kan skrivas på

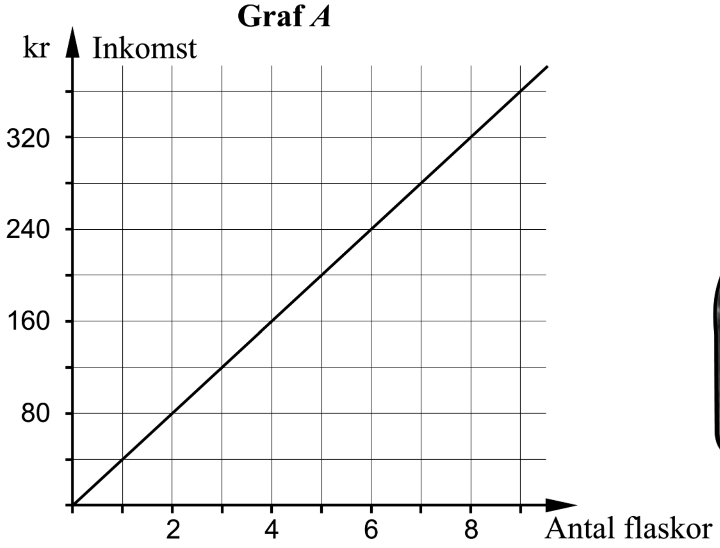
formen $f'(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{ax}}$

Bestäm konstanten a. ______________________ (0/0/1)

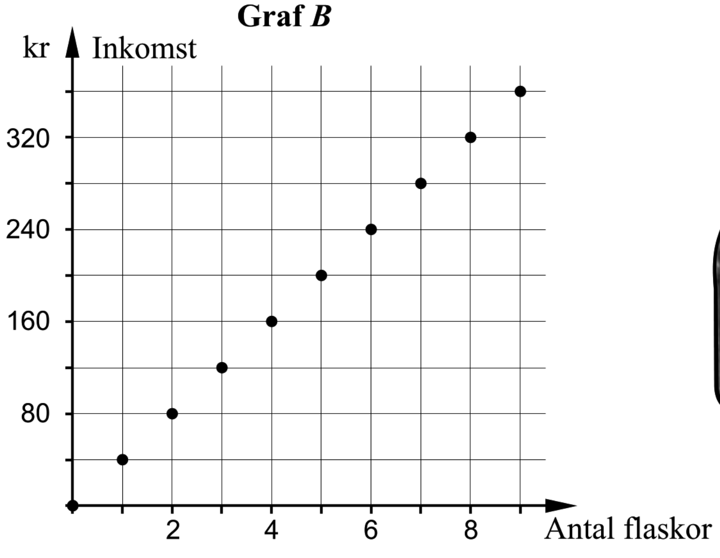
Delprov C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

12. Daniel och Jakob säljer blåbärssaft. Varje flaska kostar 40 kronor.
Vilken av graferna *A* eller *B* beskriver bäst inkomsten från försäljningen av blåbärssaften? Motivera ditt svar. (1/0/0)

Graf *A*



Graf *B*



13. För funktionen f gäller att $f(x) = x^3 - 12x$
Använd derivata och bestäm koordinaterna för eventuella maximi-, minimi- och terrasspunkter för funktionens graf.

Bestäm också karaktär för respektive punkt, det vill säga om det är en maximi-, minimi- eller terrasspunkt. (3/1/0)

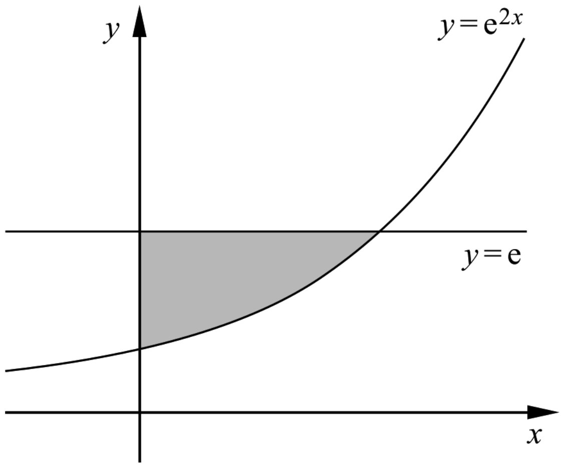
14. Beräkna integralerna algebraiskt.

a) $\displaystyle\int_0^3 (x^2 - 2)\,\mathrm{d}x$ (2/0/0)

b) $\displaystyle\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x$ (0/2/0)

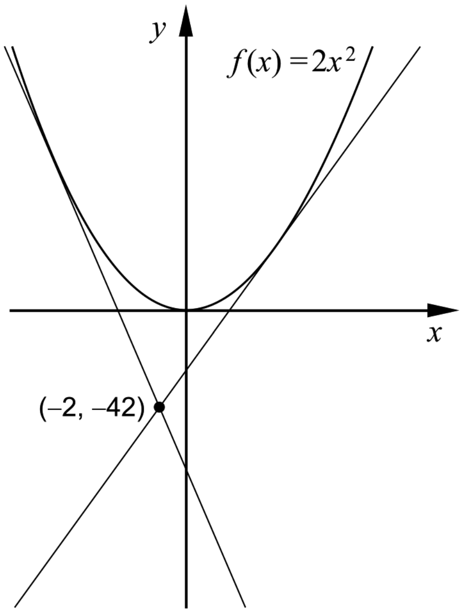
15. Lös ekvationen $\dfrac{3}{9-3x} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3-x}$ (0/2/0)

16. Det gråmarkerade området i figuren begränsas av kurvan $y = \mathrm{e}^{2x}$, linjen $y = \mathrm{e}$ samt den positiva y-axeln.



Beräkna det gråmarkerade områdets area algebraiskt och svara på så enkel form som möjligt. (0/3/0)

17. För funktionen f gäller att $f(x) = 2x^2$. Grafen till funktionen har två tangenter som går genom punkten $(-2, -42)$, se figur.



Bestäm ekvationen för en av de två tangenterna algebraiskt. (0/0/4)

Delprov D	Uppgift 18–26. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 68 poäng varav 24 E-, 25 C- och 19 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 18 poäng
D: 27 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 35 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 45 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 54 poäng varav 11 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: ______________________________

Födelsedatum: ______________________________

Gymnasieprogram/Komvux: ______________________________

Delprov D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

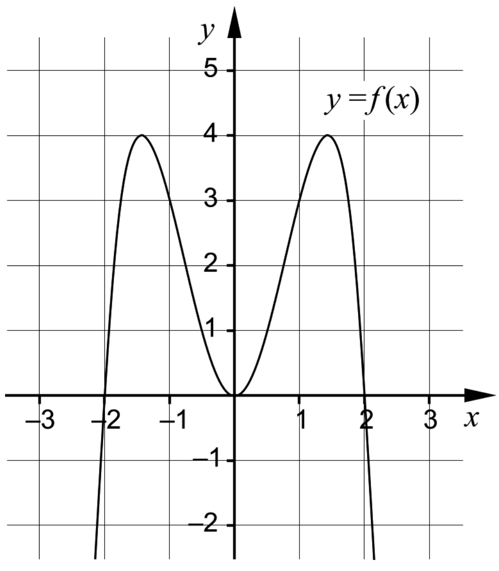
18. Miriam har födelsedag den 1 januari. På varje födelsedag sätter hennes farmor in 1000 kr på Miriams fondkonto. Anta att den årliga procentuella värdeökningen på fondkontot är 6 %.

Bestäm hur många insättningar farmor behöver göra för att Miriam ska ha minst 30 000 kr på sitt konto precis efter den sista insättningen.

Bortse från skatteeffekter. (2/0/0)

19. För funktionen f gäller att $f'(x) = 4x^3$
Bestäm $f(x)$ så att $f(5) = 282$ (2/0/0)

20. För funktionen f gäller att $f(x) = 4x^2 - x^4 + A$ där A är en konstant.
Figuren visar grafen till funktionen f då $A = 0$



a) Sabina påstår:
– Funktionen har alltid tre extrempunkter oavsett värde på konstanten A.
Har Sabina rätt? Motivera ditt svar. (1/0/0)

b) Sabina undersöker $f(x) = 4x^2 - x^4$ och påstår:
– Andraderivatan för $f(x) = 4x^2 - x^4$ är mindre än 10 för alla x.
Har Sabina rätt? Motivera ditt svar. (0/1/0)

21. Föreningen Lyckans IF vill göra en prognos över antalet medlemmar för de kommande åren. Efter att ha studerat medlemsantalet under de senaste åren ställer de upp modellen

$f(t) = 1250\mathrm{e}^{0,012 \cdot t}$

där $f(t)$ är antalet medlemmar och t är tiden i år efter 1 januari år 2010.

a) Bestäm vilket år föreningen har 2000 medlemmar enligt modellen. (2/0/0)

b) Bestäm hur snabbt antalet medlemmar ökar 1 januari år 2030 enligt modellen. (0/2/0)

Det finns även andra modeller som beskriver antalet medlemmar som funktion av tiden. En sådan modell är

$g(t) = 1250 + 16t$

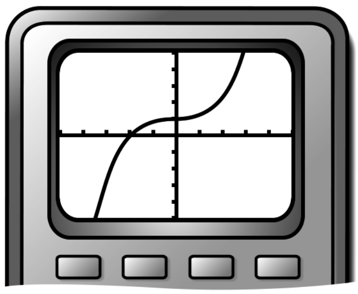
där $g(t)$ är antalet medlemmar och t är tiden i år efter 1 januari år 2010.

Lyckans IF vill undersöka hur prognosen för antalet medlemmar beror av vilken modell de använder. De tänker därför undersöka skillnaden i antalet medlemmar mellan de båda modellerna med hjälp av en ny funktion.

c) Ställ upp den nya funktionen och använd den för att bestämma för vilket värde på t som skillnaden i antalet medlemmar är som störst i intervallet $0 \le t \le 15$ (0/3/0)

22. Peder ritar upp grafen till $f(x) = x^3 + 0{,}03x + 1$ på sin grafritande räknare och säger:

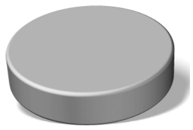
– Jag ser att grafen har en terrasspunkt.



Undersök om han har rätt. (0/2/0)

23. Ellen och David har startat ett UF-företag och tänker tillverka och sälja två olika sorters tvålar. Den ena tvålen ska vara röd och hjärtformad och den andra ska vara rosa och rund.

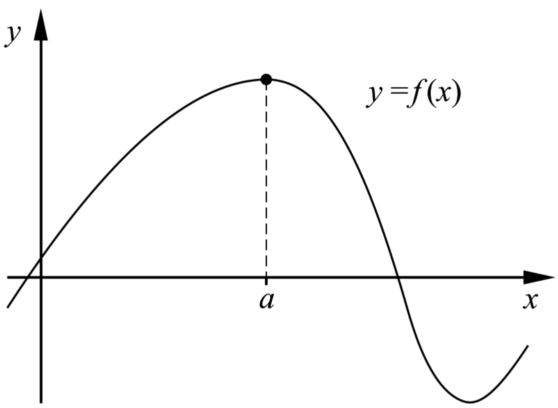
Tvålarna ska tillverkas av tvålmassa, torkade rosenblad och röd tvålfärg. Ellen och David har 10 000 g tvålmassa, 100 g torkade rosenblad och 40 g röd tvålfärg. Nedan visas hur mycket tvålmassa, torkade rosenblad och tvålfärg som de har totalt och som behövs för att tillverka en tvål av varje sort.

	 Hjärta	 Rund	Totalt:
Tvålmassa	100 g	125 g	10 000 g
Torkade rosenblad	1 g	1 g	100 g
Röd tvålfärg	1 g	0,25 g	40 g

De har räknat ut att de tjänar 15 kr för varje hjärtformad tvål och 10 kr för varje rund tvål. Ellen och David förutsätter att alla tvålar de tillverkar blir sålda.

Anta att de tillverkar x hjärtformade tvålar och y runda tvålar. Bestäm hur många tvålar av varje sort som de ska sälja för att tjäna så mycket pengar som möjligt. (0/4/0)

24. Figuren visar grafen till funktionen f.



Utgå från figuren och förklara varför funktionens andraderivata är negativ i maximipunkten där $x = a$. (0/0/2)

25. Michel har glömt sin miniräknare och ska beräkna den geometriska summan

$S_{10} = 1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 19683$

Nedan visas hans korrekta beräkningar.

$$
\begin{aligned}
S_{10} &= 1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 19683 \\
3S_{10} &= 3(1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 19683) \\
3S_{10} - S_{10} &= 3(1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 19683) - (1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 19683) \\
S_{10}(3 - 1) &= 3 \cdot 19683 - 1 \\
2S_{10} &= 59049 - 1 \\
S_{10} &= \frac{59049 - 1}{2} \\
S_{10} &= 29524
\end{aligned}
$$

Bevisa att $S_n = \dfrac{a(k^n - 1)}{k - 1}$

för den geometriska summan $S_n = a + ak + ak^2 + ak^3 + \ldots + ak^{n-1}$

Utgå från Michels beräkningar som hjälp för att genomföra beviset. (0/0/2)

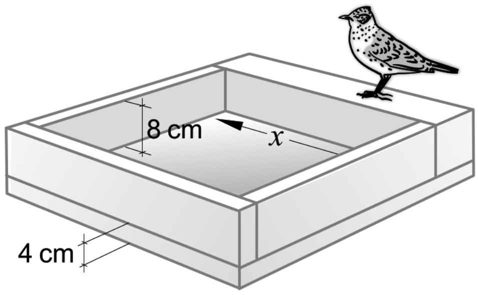
26. Amira ska tillverka fågelbad i betong. Fågelbaden består av fyra sidor som ska sättas fast på en rektangulär bottenplatta. Hon vill att fågelbaden ska ha en tillräckligt stor bottenyta och att kanterna inte ska vara för höga. Hon ställer därför upp följande villkor:

- Djupet, från överkanten till bottenplattan, ska vara 8 cm.
- Bottenplattan ska ha en tjocklek på 4 cm.

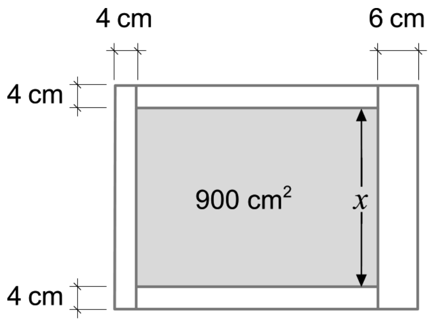
Se figur 1.

- En av sidorna ska ha en tjocklek på 6 cm.
- Tre av sidorna ska ha en tjocklek på 4 cm.
- Bottenytan, det vill säga ytan inuti fågelbaden, ska ha arean 900 cm^2.

Se figur 2.



Figur 1.
Ett fågelbad sett snett från sidan.



Figur 2.
Ett fågelbad sett rakt uppifrån.

Amira vill använda så lite betong som möjligt och tänker därför räkna ut hur mycket betong som behövs till varje fågelbad. Hon antar att bottenytan har en sida som är x cm lång. Se figurerna ovan.

Ställ upp en funktion som anger volymen betong som funktion av x.
Utgå sedan från din funktion och bestäm den minsta volym betong som Amira behöver till varje fågelbad. (0/0/4)

Till eleven – information inför det muntliga delprovet

Du kommer att få en uppgift som du ska lösa skriftligt och sedan ska du presentera din lösning muntligt. Om du behöver får du ta hjälp av dina klasskamrater, din lärare och ditt läromedel när du löser uppgiften. Din muntliga redovisning börjar med att du presenterar vad uppgiften handlar om och sedan får du beskriva och förklara din lösning. Du ska redovisa alla steg i din lösning. Däremot, om du har gjort samma beräkning flera gånger (till exempel i en värdetabell) så kan det räcka med att du redovisar några av beräkningarna. Din redovisning är tänkt att ta maximalt 5 minuter och ska göras för en mindre grupp klasskamrater och din lärare.

Den uppgift som du får ska i huvudsak lösas för hand, algebraiskt. Det kan hända att du behöver en miniräknare för att göra en del beräkningar men du ska inte hänvisa till grafritande och/eller symbolhanterande funktioner på räknaren (om du har en sådan typ av räknare) när du redovisar din lösning.

Vid bedömningen av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
Din redovisning ska innehålla de delar som behövs för att dina tankar ska gå att följa och förstå. Det du säger bör komma i lämplig ordning och inte innehålla någonting onödigt. Den som lyssnar ska förstå hur beräkningar, beskrivningar, förklaringar och slutsatser hänger ihop med varandra.

Hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
Din redovisning bör innehålla både beskrivningar och förklaringar. Man kan enkelt säga att en beskrivning svarar på frågan ”*Hur?*” och en förklaring svarar på frågan ”*Varför?*”. Du beskriver något när du till exempel berättar *hur* du har gjort en beräkning. Du förklarar något när du motiverar *varför* du till exempel kunde använda en viss formel.

Hur väl du använder den matematiska terminologin
När du redovisar bör du använda ett språk som innehåller matematiska termer, uttryckssätt och symboler som är lämpliga utifrån den uppgift du har löst.

Matematiska termer är ord som till exempel ”exponent”, ”funktion” och ”graf”.

Ett exempel på ett matematiskt uttryckssätt är att x^2 utläses ”x upphöjt till 2” eller ”x i kvadrat”.
Några exempel på matematiska symboler är π och $f(x)$, vilka utläses ”pi” och ”f av x”.

Uppgift 1

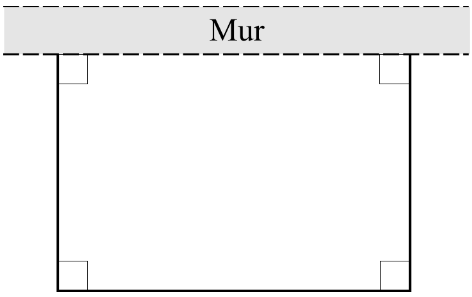
Namn:______________________________

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

En rektangulär hage ska byggas mot en mur. Det finns 100 meter stängsel som ska räcka till tre av sidorna eftersom den fjärde sidan utgörs av muren. Se figur.

Bestäm med hjälp av derivata den maximala area som hagen kan få.



Uppgift 2

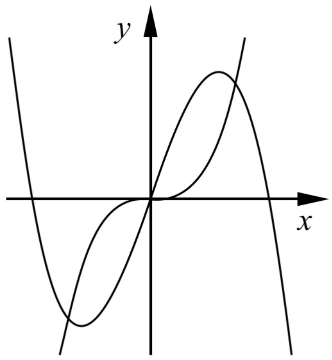
Namn:________________________________

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Ett område innesluts av positiva x-axeln och kurvorna $y_1 = 4x^3$ och $y_2 = 32x - 4x^3$

Beräkna arean av området.



Uppgift 3

Namn:________________________________

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

För de två variablerna x och y gäller villkoren: $\begin{cases} y+2x \le 9 \\ 2y-x \le 10 \\ y \ge 0 \\ 0 \le x \le 3{,}5 \end{cases}$

Bestäm det största och minsta värde som funktionen $V = 6x - 4y$ kan anta.

Uppgift 4

Namn:______________________________

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

För funktionen f gäller att

- $f'(x) = 3x^2 - 12x$
- $f(2) = 5$

Bestäm funktionens minsta och största värde i intervallet $-1 \leq x \leq 7$

Bedömningsmatris för bedömning av muntlig kommunikativ förmåga

Kommunikativ förmåga	**E**	**C**	**A**	**Max**
Fullständighet, relevans och struktur Hur fullständig, relevant och strukturerad elevens redovisning är.	Redovisningen kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Det finns en övergripande struktur men redovisningen kan bitvis vara fragmentarisk eller rörig. (1/0/0)		Redovisningen är fullständig och endast relevanta delar ingår. Redovisningen är välstrukturerad. (1/0/1)	(1/0/1)
Beskrivningar och förklaringar Förekomst av och utförlighet i beskrivningar och förklaringar.	Någon förklaring förekommer men tyngdpunkten i redovisningen ligger på beskrivningar. Utförligheten i de beskrivningar och de förklaringar som framförs kan vara begränsad. (1/0/0)		Redovisningen innehåller tillräckligt med utförliga beskrivningar och förklaringar. (1/0/1)	(1/0/1)
Matematisk terminologi Hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse vid enstaka tillfällen i redovisningen. (1/0/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom delar av redovisningen. (1/1/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom hela redovisningen. (1/1/1)	(1/1/1)
Summa				(3/1/3)

Innehåll

Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsanvisningar
Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt två olika modeller. Avvikelser från dessa kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.

Modell 1:

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (…)	+1 E_P

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2:

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. … 1 E_R	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. … 1 E_R och 1 C_R	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. … 1 E_R, 1 C_R och 1 A_R

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga
Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för provbetyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\approx$, $\pm$, $\sqrt{}$, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, x, y, $(\ )$, $[\ ]$, $\int \mathrm{d}x$, bråkstreck, index, lim, VL, HL
Termer	t.ex. polynom, rationellt uttryck, kontinuerlig/diskret funktion, rät linje, andragrads-/polynom-/potens-/exponentialfunktion, funktionsvärde, definitions-/värdemängd, punkt, intervall, område, koordinat, koordinatsystem, graf, kurva, skärningspunkt, nollställe, symmetrilinje, lutning, riktningskoefficient, ändpunkt, sekant, tangent, ändringskvot, förändringshastighet, gränsvärde, derivata, andraderivata, teckenschema, växande/avtagande, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, primitiv funktion, integral, talet e, naturlig logaritm, geometrisk summa, olikhet
Hänvisningar	t.ex. till derivatans definition, räta linjens ekvation, tangentens ekvation, formeln för geometrisk summa
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

Provsammanställning – Kunskapskrav

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 3b i förhållande till nivå och förmågor. Poängen i denna tabell anges i samma ordning som i bedömningsanvisningen. Till exempel motsvarar 21a_1 och 21a_2 den första respektive andra poängen i uppgift 21a.

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
A	M_1				1								
	M_2												1
	M_3				1								
	M_4												1
	M_5				1								
	M_6								1				
	M_7												1
B	1	1											
	2a	1											
	2b	1											
	2c	1											
	3	1											
	4		1										
	5a		1										
	5b						1						
	6a	1											
	6b					1							
	7					1							
	8_1					1							
	8_2									1			
	9									1			
	10										1		
	11										1		
C	12				1								
	13_1		1										
	13_2		1										
	13_3		1										
	13_4								1				
	14a_1		1										
	14a_2		1										
	14b_1						1						
	14b_2						1						
	15_1						1						
	15_2						1						
	16_1							1					
	16_2							1					
	16_3							1					
	17_1											1	
	17_2											1	
	17_3											1	
	17_4												1

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
D	18_1			1									
	18_2			1									
	19_1			1									
	19_2			1									
	20a				1								
	20b								1				
	21a_1			1									
	21a_2			1									
	21b_1					1							
	21b_2					1							
	21c_1							1					
	21c_2							1					
	21c_3								1				
	22_1								1				
	22_2								1				
	23_1							1					
	23_2							1					
	23_3							1					
	23_4								1				
	24_1												1
	24_2												1
	25_1												1
	25_2												1
	26_1											1	
	26_2											1	
	26_3											1	
	26_4												1
	Total	**6**	**7**	**6**	**5**	**5**	**5**	**8**	**7**	**2**	**2**	**6**	**9**
Σ	**68**	**24**				**25**				**19**			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Provsammanställning – Centralt innehåll

Tabell 2 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 3b i förhållande till nivå och centralt innehåll. En lista över det centrala innehållet återfinns i slutet av detta häfte.

Del-prov	Uppg.	Nivå			Centralt innehåll Kurs Ma3b																		
					Algebra		Samband och förändring											Problem-lösning		
		E	C	A	A1	A2	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15	F16	P1	P3	P4
A		3	1	3																
B	1	1	0	0	X															
	2a	1	0	0						X										
	2b	1	0	0						X			X		X					
	2c	1	0	0						X			X		X					
	3	1	0	0	X															
	4	1	0	0	X															
	5a	1	0	0						X	X									
	5b	0	1	0						X	X									
	6a	1	0	0						X					X					
	6b	0	1	0					X				X							
	7	0	1	0												X	X			
	8	0	1	1												X	X			
	9	0	0	1	X			X				X								
	10	0	0	1	X	X														
	11	0	0	1						X	X									
C	12	1	0	0				X												
	13	3	1	0						X	X			X						
	14a	2	0	0												X	X			
	14b	0	2	0												X	X			
	15	0	2	0	X															
	16	0	3	0								X				X	X	X		
	17	0	0	4						X	X		X		X			X		
D	18	2	0	0			X											X	X	
	19	2	0	0						X						X		X		
	20a	1	0	0					X	X					X					
	20b	0	1	0						X	X		X		X					
	21a	2	0	0								X						X	X	
	21b	0	2	0						X	X	X	X		X					
	21c	0	3	0						X	X	X		X	X			X	X	
	22	0	2	0					X	X	X		X	X	X					
	23	0	4	0			X											X	X	
	24	0	0	2						X			X	X	X					
	25	0	0	2			X													
	26	0	0	4	X					X	X		X	X	X			X	X	
Total		24	25	19																

Kravgränser

Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 68 poäng varav 24 E-, 25 C- och 19 A-poäng. Observera att kravgränserna förutsätter att eleven deltagit i alla fyra delprov, det vill säga Delprov A, B, C och D.

Kravgräns för provbetyget
E: 18 poäng
D: 27 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 35 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 45 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 54 poäng varav 11 poäng på A-nivå

Bedömningsformulär

Elev:____________________________ Klass:________________ Provbetyg: _____________

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
A	M_1												
	M_2												
	M_3												
	M_4												
	M_5												
	M_6												
	M_7												
B	1												
	2a												
	2b												
	2c												
	3												
	4												
	5a												
	5b												
	6a												
	6b												
	7												
	8_1												
	8_2												
	9												
	10												
	11												
C	12												
	13_1												
	13_2												
	13_3												
	13_4												
	14a_1												
	14a_2												
	14b_1												
	14b_2												
	15_1												
	15_2												
	16_1												
	16_2												
	16_3												
	17_1												
	17_2												
	17_3												
	17_4												

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
D	18_1												
	18_2												
	19_1												
	19_2												
	20a												
	20b												
	21a_1												
	21a_2												
	21b_1												
	21b_2												
	21c_1												
	21c_2												
	21c_3												
	22_1												
	22_2												
	23_1												
	23_2												
	23_3												
	23_4												
	24_1												
	24_2												
	25_1												
	25_2												
	26_1												
	26_2												
	26_3												
	26_4												
	Total												
Σ													

	Total	**6**	**7**	**6**	**5**	**5**	**5**	**8**	**7**	**2**	**2**	**6**	**9**
Σ	**68**	**24**				**25**				**19**			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Bedömningsanvisningar

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

Delprov B

1.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (5)	+1 E_B
2.		**Max 3/0/0**
a)	Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning (3) *eller* (-3)	+1 E_B
b)	Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning (0)	+1 E_B
c)	Korrekt svar (D: 20 april)	+1 E_B
3.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (2)	+1 E_B
4.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (x^5)	+1 E_P
5.		**Max 1/1/0**
a)	Korrekt svar $(12x^3 + 2x)$	+1 E_P
b)	Korrekt svar $\left(\dfrac{k}{4}\right)$	+1 C_P

6. **Max 1/1/0**

a) Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning ($x_1 = 3$ och $x_2 = 10$) +1 E_B

Kommentar: Om svaret anges med både *x*- och *y*-koordinater ges noll poäng.

b) Godtagbart markerade punkter ($A = (1,0)$, $B = (3,-1,5)$ och $C = (14,-3)$) +1 C_B

7. **Max 0/1/0**

Korrekt svar (12) +1 C_B

8. **Max 0/1/1**

Korrekta integrationsgränser och värde (2, 7 och 45107) +1 C_B

Korrekt integrand ($f'(t)$) +1 A_B

Kommentar: Bedömningen till denna uppgift avviker från de beskrivna bedömningsmodellerna på sidan 3. Den andra begreppspoängen kan delas ut oavsett om den första begreppspoängen har delats ut eller inte.

9. **Max 0/0/1**

Korrekt svar $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ +1 A_B

10. **Max 0/0/1**

Korrekt svar ($x_1 = 5$ och $x_2 = 6$) +1 A_P

11. **Max 0/0/1**

Korrekt svar (4) +1 A_P

Delprov C

12. **Max 1/0/0**

Godtagbart enkelt resonemang som styrker att Graf B ska väljas eftersom enbart hela flaskor ska säljas *eller* att Graf B ska väljas eftersom inkomsten beskrivs med en diskret funktion +1 E_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

13. **Max 3/1/0**

Korrekt bestämning av derivatans nollställen, $x_1 = -2$ och $x_2 = 2$ +1 E_P

med korrekt bestämning av extrempunkternas koordinater $(-2, 16)$ och $(2, -16)$ +1 E_P

Godtagbar verifiering av extrempunkternas karaktär (maximipunkt $(-2, 16)$ och minimipunkt $(2, -16)$) +1 E_P

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C_K

Kommentar: Bedömningen till denna uppgift avviker från de beskrivna bedömningsmodellerna på sidan 3. Den tredje procedurpoängen kan delas ut oavsett om den andra procedurpoängen har delats ut eller inte.

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

14. **Max 2/2/0**

a) Godtagbar ansats, bestämmer korrekt primitiv funktion +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (3) +1 E_P

b) Godtagbar ansats, bestämmer korrekt primitiv funktion +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $\left(\frac{15}{8}\right)$ +1 C_P

15. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t.ex. skriver om ekvationen till $\frac{3}{3-x} = \frac{1}{3}$ +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x = -6$) +1 C_P

16. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer den övre integrationsgränsen, $x = 0{,}5$ +1 C_{PL}

med godtagbar fortsättning, t.ex. korrekt beräkning av $\int_0^{0,5} e^{2x}dx$, $0{,}5e - 0{,}5$ +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (0,5 a.e.) +1 C_{PL}

Kommentar: Svar utan enhet eller med felaktig enhet godtas.

17. **Max 0/0/4**

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $4a = \frac{2a^2 - (-42)}{a - (-2)}$ där a är tangeringspunktens x-koordinat +1 A_{PL}

med godtagbar fortsättning, t.ex. bestämmer den ena tangeringspunktens x-koordinat, $a_1 = -7$ *eller* $a_2 = 3$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($y = -28x - 98$) *eller* ($y = 12x - 18$) +1 A_{PL}

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Delprov D

18. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $1000 \cdot \frac{1{,}06^x - 1}{1{,}06 - 1} = 30000$ +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (18) +1 E_M

19. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, bestämmer det allmänna uttrycket för funktionen, t.ex. $f(x) = x^4 + C$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($f(x) = x^4 - 343$) +1 E_{PL}

20. **Max 1/1/0**

a) Godtagbart enkelt resonemang som styrker att Sabina har rätt, t.ex. resonemang baserat på argumentet att värdet hos konstanten A endast påverkar grafens läge i y-led +1 E_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

b) Godtagbart välgrundat resonemang som styrker att Sabina har rätt, t.ex. resonemang baserat på argumentet att $y'' = 8 - 12x^2$ är maximalt 8 eftersom termen $-12x^2$ alltid är negativ eller noll +1 C_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

21. **Max 2/5/0**

a) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $1250e^{0,012 \cdot t} = 2000$ +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (2049) +1 E_M

b) Godtagbar ansats, visar insikt om att funktionen ska deriveras, t.ex. genom att påbörja derivering av funktionen f +1 C_B

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar inklusive korrekt enhet (19 medlemmar/år) +1 C_B

c) Godtagbar ansats, bildar en differensfunktion t.ex.
$S = 1250e^{0,012 \cdot t} - (1250 + 16t)$ +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($t = 15$) +1 C_M

Lösningen (deluppgift a, b och c) kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

22. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, påbörjar ett välgrundat resonemang genom att använda en undersökningsmetod som kan ge väl underbyggda slutsatser, t.ex. undersöker på sin grafräknare om *derivatans* graf har några nollställen +1 C_R

med godtagbart slutfört välgrundat resonemang med korrekt slutsats (t.ex. ”Grafen till derivatan blir aldrig noll, så det är ingen terrasspunkt”) +1 C_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

23. **Max 0/4/0**

Godtagbar ansats,

t.ex. tecknar de två olikheterna $\begin{cases} 100x + 125y \le 10000 \\ x + y \le 100 \end{cases}$ korrekt +1 C_M

med godtagbar fortsättning, bestämmer ett system av olikheter som motsvarar kraven, t.ex.

$$\begin{cases} 100x + 125y \le 10000 \\ x + y \le 100 \\ x + 0,25y \le 40 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$ +1 C_M

Godtagbar lösning, där punkterna (0, 80), (25, 60) och (40, 0) prövas, med korrekt svar (25 hjärtformade och 60 runda tvålar) +1 C_M

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C_K

Kommentar: Bedömningen till denna uppgift avviker från de beskrivna bedömningsmodellerna på sidan 3. Här kan tredje modelleringspoängen delas ut oavsett om andra modelleringspoängen har delats ut eller inte.

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

24. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, påbörjar ett välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. om varför derivatan är avtagande kring punkten där $x = a$ +1 A_R

med fortsatt välgrundat och nyanserat resonemang som förklarar varför en avtagande derivata innebär en negativ andraderivata i punkten där $x = a$ +1 A_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

25. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, inleder ett bevis genom att bilda den nya ekvationen $k \cdot S_n = ak + ak^2 + ak^3 + ak^4 + ... + ak^n$ och beräknar differensen mellan den nya och den givna ekvationen, $k \cdot S_n - S_n = ak^n - a$ +1 A_R

med i övrigt godtagbart slutfört bevis +1 A_R

26. **Max 0/0/4**

Godtagbar ansats, tecknar en i huvudsak korrekt volymfunktion i en variabel *eller* en korrekt volymfunktion i två variabler, t.ex.
$V = 12(x+8)(y+10) - 8xy$ +1 A_M

med godtagbar fortsättning, tecknar en korrekt volymfunktion i en variabel,
t.ex. $V = 12(x+8)(\frac{900}{x}+10) - 8x \cdot \frac{900}{x}$ +1 A_M

med i övrigt godtagbar lösning inklusive verifiering av minimum med godtagbart svar (11000 cm^3) +1 A_M

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 A_K

__Se avsnittet Bedömda elevlösningar.__

Bedömda elevlösningar

Uppgift 12

Elevlösning 12.1 (0 poäng)

Graf B för att den blir lättare att följa
och har en punkt för varje flaska

Kommentar: Det framgår inte av elevlösningen att enbart hela flaskor säljs. Elevlösningen ges noll poäng.

Elevlösning 12.2 (1 E_R)

Svar: Graf B eftersom man antingen kan
sälja 1 eller 2 flaskor, inget där emellan.

Kommentar: Elevlösningen visar ett enkelt godtagbart resonemang, där det framgår att man bara kan sälja hela flaskor. Elevlösningen ges en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösning 12.3 (1 E_R)

Graf B. Detta eftersom grafen måste vara
en diskret funktion, vilket graf B är.

Kommentar: Elevlösningen visar ett enkelt godtagbart resonemang där det framgår att det handlar om en diskret funktion. Elevlösningen ges en resonemangspoäng på E-nivå.

Uppgift 13

Elevlösning 13.1 (3 E_P och 1 C_K)

$f(x) = x^3 - 12x$

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$

$x^2 - 4 = 0$

$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$x_1 = 2$ och $x_2 = -2$

$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = 8 - 24 = -16$

$f(-2) = -2^3 - 12 \cdot -2 = -8 + 24 = 16$

Punkterna är $(2, -16)$ och $(-2, 16)$

x	-4	-2	0	2	4
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$

$(2, -16)$ är en minimipunkt

$(-2, 16)$ är en maximipunkt

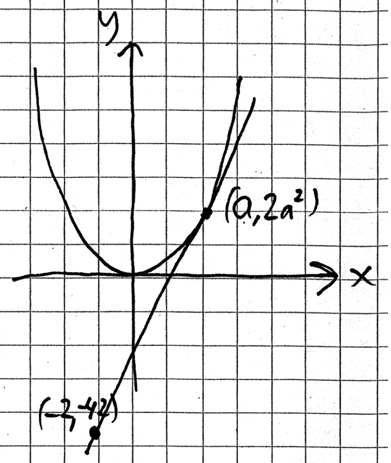
Kommentar: Uppgiften är löst i sin helhet inklusive verifiering av extrempunkter. När det gäller kommunikation är lösningen strukturerad och möjlig att följa och förstå trots att det felaktiga skrivsättet ” $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$ ” används, att parenteser runt negativa tal saknas och att de beräkningar som ligger bakom teckenschemat inte redovisas. Elevlösningen ges tre procedurpoäng på E-nivå samt nätt och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 17

Elevlösning 17.1 (2 A_{PL} och 1 A_K)

$f(x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x$

<u>Tangentens ekvation</u>



$y = kx + m$

Tangenten ska gå genom $(-2, -42)$ och $(a, 2a^2)$

Tangentens k-värde är värdet på $f'(x)$ i punkten a

$f'(a) = 4a \Rightarrow$ k-värdet $= 4a$

Ekv. system:

$$\begin{cases} -42 = 4a \cdot (-2) + m \\ 2a^2 = 4a \cdot a + m \end{cases}$$

$$\begin{cases} -42 = -8a + m \\ 2a^2 = 4a^2 + m \end{cases}$$

$$\begin{cases} -42 + 8a - m = 0 \\ 2a^2 + m = 0 \end{cases}$$

$$2a^2 + 8a - 42 = 0$$

$$a^2 + 4a - 21 = 0$$

$$a = -2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 21}$$

$$a = -2 \pm 5$$

$$a_1 = 3 \quad (a_2 = -7)$$

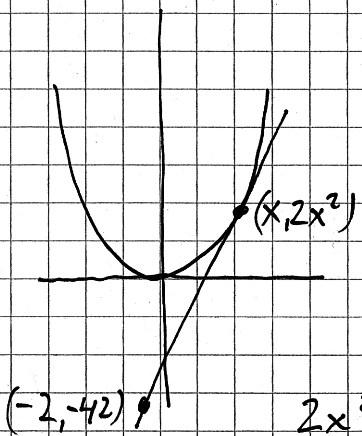
$$k = 4a = 12$$

$$m = -8a + 42 = -8 \cdot 3 + 42 = 18$$

<u>SVAR:</u> $y = 12x + 18$

Kommentar: Uppgiften är behandlad i sin helhet och är korrekt förutom teckenfel i samband med att *m* ska lösas ut på nedersta raden i lösningen, $m = -8a + 42$. När det gäller kommunikation anses lösningen lätt att följa och förstå bland annat eftersom variabler och konstanter åtskiljs med olika beteckningar (x och a). Sammantaget ges två problemlösningspoäng på A-nivå och en kommunikationspoäng på A-nivå.

Elevlösning 17.2 (3 A_{PL} och 1 A_K)



$f(x) = 2x^2$

$f'(x) = 4x$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x^2 - (-42)}{x - (-2)}$

$\frac{2x^2 + 42}{x + 2} = 4x$

Det vet jag för derivatan lutningen är lika med $4x$

$2x^2 + 42 = 4x(x + 2)$

$2x^2 + 42 = 4x^2 + 8x$

$2x^2 + 8x - 42 = 0$

$x^2 + 4x - 21 = 0$

$x = -2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 21}$

$x_1 = -2 + 5 = 3$

$x_2 = -2 - 5 = -7$

väljer den pos tangenten

$(-2, -42)$ $k = 12$

$-2 \cdot 12 + m = -42$

$m = -42 + 24 = -18$

SVAR: $y = 12x - 18$

Kommentar: Uppgiften är behandlad i sin helhet och är korrekt. När det gäller kommunikation anses lösningen lätt att följa och förstå trots att både variabler och konstanter betecknas med *x*. Sammantaget ges tre problemlösningspoäng på A-nivå samt nätt och jämnt en kommunikationspoäng på A-nivå.

Uppgift 20a

Elevlösning 20a.1 (1 E_R)

a) Ja Sabina har rätt då konstanten
A bara påverkar var minimipunkten
har sin y-koordinat

Kommentar: Elevlösningen visar ett enkelt godtagbart resonemang där det framgår att värdet på konstanten *A* endast påverkar minimipunktens läge i *y*-led. Resonemanget hade varit tydligare om det framgått att *hela grafen* förskjuts i *y*-led. Elevlösningen ges nätt och jämnt resonemangspoängen på E-nivå.

Elevlösning 20a.2 (1 E_R)

a) Ja hon har rätt. Extrempunkternas
x-koordinater fås när $f'(x)=0$
Eftersom A är en konstant deriveras inte den,
så $f'(x)$ är alltid $8x-4x^2$ oavsett A:s värde

Kommentar: Elevlösningen visar ett enkelt godtagbart resonemang. Frasen ”deriveras inte den” är felaktig men kompenseras av resonemanget på sista raden. Elevlösningen ges resonemangspoängen på E-nivå.

Uppgift 20b

Elevlösning 20b.1 (0 poäng)

$f(x) = 4x^2 - x^4$

Påstående $f''(x)$ är mindre än 10 för alla x

$f'(x) = 8x - 4x^3$

$f''(x) = 8 - 12x^2$

Ja, i och med $-12x^2$ går det inte att få det större än 10.

Kommentar: Elevlösningen bedöms inte ha en sådan kvalitet att den motsvarar en resonemangspoäng på C-nivå eftersom det inte förklaras på vilket sätt termen $-12x^2$ påverkar andraderivatans värde. Elevlösningen ges noll poäng.

Elevlösning 20b.2 (0 poäng)

Sabina har rätt då det högsta värdet är 8.

$f(x) = 4x^2 - x^4 \Rightarrow f'(x) = 8x - 4x^3 \Rightarrow f''(x) = 8 - 12x^2$

Kommentar: Elevlösningen bedöms inte ha en sådan kvalitet att den motsvarar en resonemangspoäng på C-nivå eftersom det utan motivering påstås att största värdet är 8. Elevlösningen ges noll poäng.

Elevlösning 20b.3 (1 C_R)

$f'(x) = 8x - 4x^3$ $\quad f''(x) = 8 - 12x^2$

Det stämmer. Eftersom $12x^2$ alltid blir positivt så blir $f''(x)$ mindre än 8.

Kommentar: Elevlösningen visar ett välgrundat resonemang trots att fallet då $12x^2 = 0$ utelämnas. Lösningen ges nätt och jämnt resonemangspoängen på C-nivå.

Uppgift 21

Elevlösning 21.1 (2 E_M, 2 C_B, 2 C_M och 1 C_K)

a) $f(t) = 1250e^{0,012t}$

$2000 = 1250e^{0,012t}$

$\ln\frac{2000}{1250} = \ln e^{0,012t}$

$0,012t = \ln\frac{2000}{1250}$

$t = \frac{\ln\frac{2000}{1250}}{0,012} \approx 39$ SVAR: 2049

b) $f'(t) = 1250 \cdot 0,012e^{0,012t}$

$f'(2030) = f'(20) = 1250 \cdot 0,012e^{0,012 \cdot 20} = 19$

SVAR: 19 st/år

c) $y = 1250 + 16t - 1250e^{0,012t}$

$y' = 16 - 1250 \cdot 0,012e^{0,012t}$

$16 = 1250 \cdot 0,012e^{0,012t}$

$\frac{16}{1250 \cdot 0,012} = e^{0,012t}$

$\ln\frac{16}{1250 \cdot 0,012} = \ln e^{0,012t}$

$t = \frac{\ln\frac{16}{1250 \cdot 0,012}}{0,012} = 5,37$

$t = 5,37$ år $\rightarrow$ 2,72

$t = 0$ år $\rightarrow$ 0

$t = 15$ år $\rightarrow$ $-6,52$ SVAR: $t = 15$

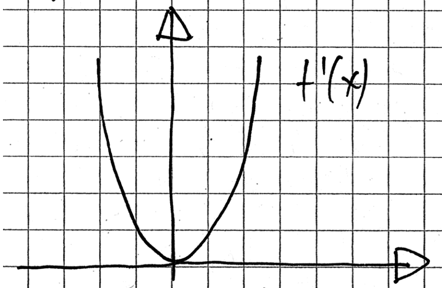
Kommentar: Uppgiften är behandlad i sin helhet och lösningen korrekt. När det gäller kommunikation är lösningen strukturerad och möjligt att följa och förstå. I b)-uppgiften är skrivsättet $f'(2030)$ felaktigt. I c)-uppgiften saknas $y' = 0$ i redovisningen och det framgår inte att det är funktionsvärden som beräknas i slutet av lösningen. Trots dessa brister bedöms elevlösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för kommunikationspoängen på C-nivå.

Uppgift 22

Elevlösning 22.1 (1 C_R)

$f(x) = x^3 + 0{,}03x + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 0{,}03$



från grafräknaren

Derivatans graf är alltid positiv utom då $x=0$ för då är derivatan 0. Teckenväxling + 0 + alltså är det en terasspunkt Peder har rätt!

Kommentar: I lösningen studeras derivatans graf på grafräknaren. Undersökningsmetoden kan leda till välgrundade slutsatser, men eftersom fönsterinställningen är för grov framgår inte att derivatan saknar nollställe och en felaktig slutsats dras. Sammantaget ges lösningen den första resonemangspoängen på C-nivå.

Elevlösning 22.2 (1 C_R)

$f(x) = x^3 + 0{,}03x + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 0{,}03$

$3x^2 + 0{,}03 = 0$

$x^2 + 0{,}01 = 0$

$x^2 = -0{,}01$

$x = \pm\sqrt{-0{,}01}$ ERROR

$x = 0{,}1$?

x	0	0,1	0,2
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	TERRASS	↗

HAN HAR RÄTT!

Kommentar: Undersökningsmetoden (söka derivatans nollställe) är godtagbar eftersom den kan leda till välgrundade slutsatser, men eftersom beräkningen av derivatans nollställe inte är korrekt dras en felaktig slutsats. Sammantaget ges lösningen den första resonemangspoängen på C-nivå.

Uppgift 23

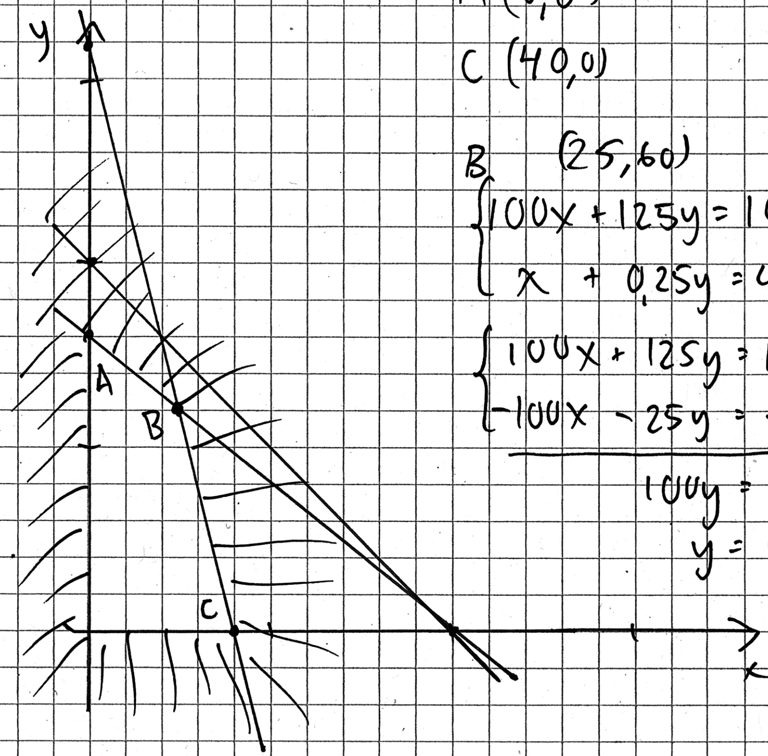
Elevlösning 23.1 (2 C_M och 1 C_K)

$$\begin{cases} 100x + 125y = 10000 \\ 1x + 1y = 100 \\ 1x + 0,25y = 40 \end{cases}$$

A (0,80)

C (40,0)

B (25,60)



$$\begin{cases} 100x + 125y = 10\,000 \\ x + 0,25y = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100x + 125y = 10\,000 \\ -100x - 25y = -4000 \end{cases}$$

$100y = 6000$

$y = 60$

$x + 0,25 \cdot 60 = 40$

$x = 25$

Vinst $= 15x + 10y$

(0,80) $15 \cdot 0 + 10 \cdot 80 = 800$

(40,0) $15 \cdot 40 + 10 \cdot 0 = 600$

(25,60) $15 \cdot 25 + 10 \cdot 60 = 975$

De ska göra 25 B och 60 C

Kommentar: Elevlösningen utgår från ett system av ekvationer istället för olikheter och villkoren $x \geq 0$ och $y \geq 0$ saknas. Höger- och vänsterled i de tre ekvationerna är dock korrekta. Denna inledning bedöms motsvara en godtagbar ansats och ges den första modelleringspoängen men inte den andra. Beräkningarna som sedan följer är korrekt utförda, vilket gör att den tredje modelleringspoängen ges. När det gäller kommunikation är figuren tydlig och visar det aktuella området och de punkter som är relevanta. Lösningen är möjlig att följa och förstå och symboler används med viss anpassning till syfte och situation, trots att de inledande ekvationerna och figuren inte är samstämmiga. Sammantaget ges elevlösningen första och tredje modelleringspoängen på C-nivå samt nätt och jämnt kommunikationspoängen på C-nivå.

Elevlösning 23.2 (3 C_M och 1 C_K)

Antal hjärttrålar x

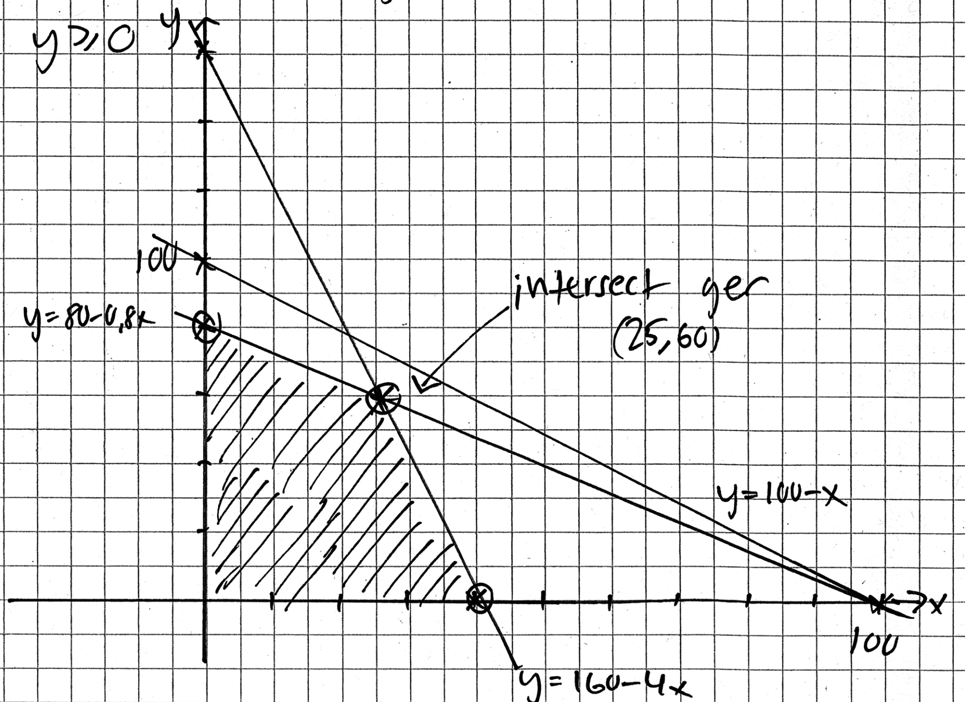
Antal rundatrålar y

$100x + 125y \leq 10000$ $(y = 80 - 0{,}8x)$

$x + y \leq 100$ $(y = 100 - x)$

$x + 0.25y \leq 40$ $(y = 160 - 4x)$

$x \geq 0 \quad y \geq 0$



Vinsten $V = 15x + 10y$

Punkt	Vinst
(40,0)	$15 \cdot 40 + 10 \cdot 0 = 600$
(25,60)	$15 \cdot 25 + 10 \cdot 60 = 975$
(0,80)	$15 \cdot 0 + 10 \cdot 80 = 800$

SVAR: Mest vinst i punkten (25,60)

Kommentar: Uppgiften är löst i sin helhet och är korrekt utförd. När det gäller kommunikation saknas klammer kring olikheterna och svaret är inte tydligt med avseende på den ställda frågan. Lösningen är i övrigt möjlig att följa och förstå med en tydlig figur. Sammantaget bedöms elevlösningen uppfylla kraven för tre modelleringspoäng på C-nivå och kommunikationspoängen på C-nivå.

Uppgift 24

Elevlösning 24.1 (0 poäng)

Den är negativ för den har en maximipunkt.
Första derivatan är ju = 0, och eftersom kurvan
börjar luta nedåt efter extrempunkten
så blir andraderivatan negativ

Kommentar: Elevlösningen visar ett resonemang där det inte framgår varför derivatan är avtagande kring punkten där $x = a$. Elevlösningen ges noll poäng.

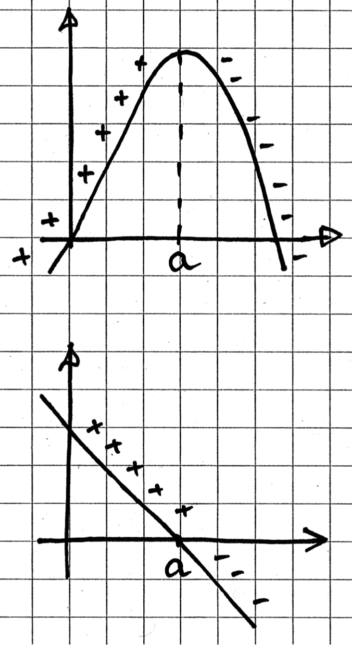
Elevlösning 24.2 (1 A_R)

Derivatan bestämmer lutningen i en punkt.
Lutningen i en vändpunkt är noll, vilket gör
att derivatans graf visar denna punkt på x-axeln
och fortsätter sedan nedåt eftersom följande
punkter har negativ lutning.
Andraderivatan visar lutningen i derivatans graf
och eftersom punkten a har negativ lutning i
derivatans graf är punkten även negativ i
andraderivatan.

Kommentar: Resonemanget omfattar endast intervallet $x \geq a$ och anses därmed endast uppfylla kraven för en godtagbar ansats. Elevlösningen ges en resonemangspoäng på A-nivå.

Elevlösning 24.3 (2 A_R)

Svar: Eftersom funktionen har en maximi så börjar derivatan positiv för att bli negativ



Derivatan
k<0 alltså andraderivatan negativ

Kommentar: Lösningen visar en godtagbar ansats där det framgår varför derivatan är avtagande kring punkten där $x = a$. Däremot saknar figurerna förklarande text om varför en avtagande derivata innebär en negativ andraderivata. Elevlösningen anses trots denna brist nätt och jämnt uppfylla kraven för två resonemangspoäng på A-nivå.

Uppgift 26

Elevlösning 26.1 (2 A_M)

$V = V_{yttre} - V_{inre}$

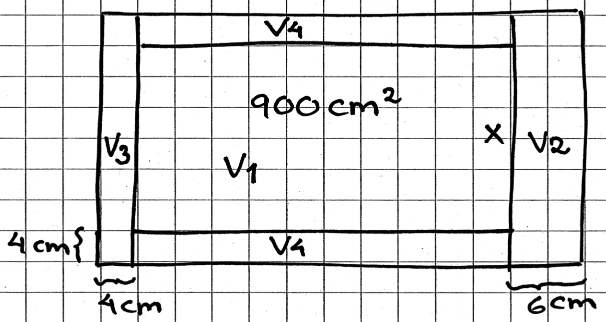
$V = 12\left(\frac{900}{x} + 10\right)(x+8) - 900 \cdot 8$

Grafräknaren ger då $x = 27$, $V = 11000$

Svar 11000 cm^3

Kommentar: Elevlösningen leder fram till rätt svar men är knapphändig. När det gäller kommunikation saknas redovisning av hur volymfunktionen bestämts och hur det digitala verktyget använts. Det är därför oklart om grafräknarfunktionen inkluderar bestämning av minimum eller inte. Sammantaget bedöms elevlösningen uppfylla kraven för två första modelleringspoängen på A-nivå.

Elevlösning 26.2 (2 A_M och 1 A_K)



5 olika delar

$y = \frac{900}{x}$

V_1 = Undre plattans volym

$= 4(x+8)\cdot(4+\frac{900}{x}+6) = (4x+32)(10+\frac{900}{x})$

$= 40x+3600+320+\frac{28800}{x} = 40x+3920+\frac{28800}{x}$

V_2 = Tjocka sidans volym

$(x+8)\cdot 6\cdot 8 = (6x+48)\cdot 8 = 48x+384$

V_3 = Smala kortsidans volym

$4\cdot 8\cdot x = 32x$

V_4 = Båda långsidornas volym

$= 2\cdot\frac{900}{x}\cdot 8\cdot 4 = \frac{2\cdot 28800}{x}$

$V_{tot} = V_1+V_2+V_3+V_4 =$

$40x+3920+\frac{28800}{x}+384+48x+32x+\frac{2\cdot 28800}{x} =$

$120x+86400\cdot x^{-1}+4304$

$V_{tot}'(x) = 120-\frac{86400}{x^2}$

$120-\frac{86400}{x^2} = 0$

$x^2 = 720\quad,\quad x=\sqrt{720}\approx 26{,}83$

$V_{tot}''(x) = -86400\cdot(-2)\,x^{-3}$

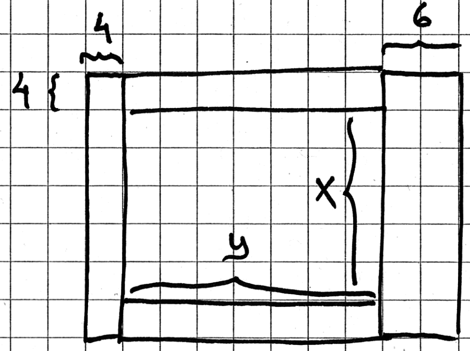
$V_{tot}''(26{,}83) = 86400\cdot 2\cdot(26{,}83)^{-3} > 0$ Minpunkt!

$\Rightarrow V_{tot} = 120\cdot 26{,}83+86400\cdot 26{,}83^{-1}+4304 = 10744\ cm^3$

Svar $10{,}7\ dm^3$

Kommentar: Uppgiften är löst i sin helhet där en i huvudsak korrekt volymfunktion (V_{tot}) är tecknad förutom att delvolymen V_3 är felaktig. Därmed ges den första modelleringspoängen men inte den andra. Eftersom lösningen fortsättningsvis är korrekt och det tidigare felet inte förenklar lösningen ges den tredje modelleringspoängen (följdfel, se sid.3). När det gäller kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå då den innehåller en tydlig figur, indexering och förklarande hjälptext. En algebraisk verifiering av minimum avslutar lösningen. Sammantaget bedöms elevlösningen uppfylla kraven för den första och den tredje modelleringspoängen på A-nivå och kommunikationspoängen på A-nivå.

Elevlösning 26.3 (3 A_M och 1 A_K)



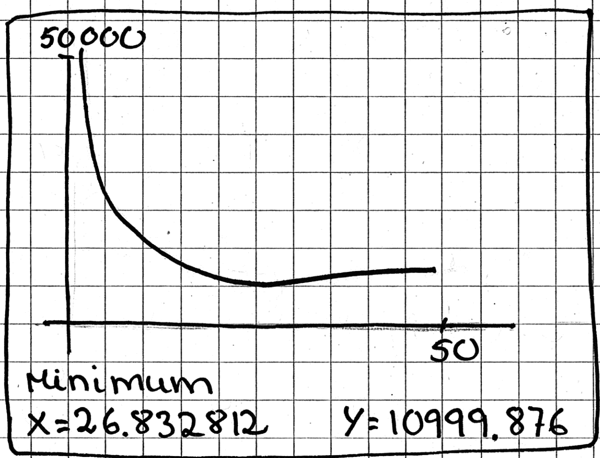
Volymen fås av yttre volymen minus inre volymen

$V = (x+8)(y+10)\cdot 12 - 8xy$ och $x \cdot y = 900$

$V = (x+8)\left(\frac{900}{x}+10\right)\cdot 12 - 8x \cdot \frac{900}{x}$

$V = (x+8)\left(\frac{900}{x}+10\right)\cdot 12 - 7200$

Ritar upp grafen på räknaren och bestämmer minpunkten



$\boxed{\text{Minsta volymen är } 11\ dm^3}$

Kommentar: Uppgiften är löst i sin helhet och korrekt. När det gäller kommunikation redovisas tydligt hur funktionsuttrycket framtagits och det framgår även hur det digitala verktyget använts och att minimum är verifierat. Sammantaget bedöms elevlösningen uppfylla kraven för tre modelleringspoäng och en kommunikationspoäng på A-nivå.

Ur ämnesplanen för matematik

Matematiken har en flertusenårig historia med bidrag från många kulturer. Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska matematiken som sådan. Kommunikation med hjälp av matematikens språk är likartad över hela världen. I takt med att informationstekniken utvecklas används matematiken i alltmer komplexa situationer. Matematik är även ett verktyg inom vetenskap och för olika yrken. Ytterst handlar matematiken om att upptäcka mönster och formulera generella samband.

Ämnets syfte

Undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar förmåga att arbeta matematiskt. Det innefattar att utveckla förståelse av matematikens begrepp och metoder samt att utveckla olika strategier för att kunna lösa matematiska problem och använda matematik i samhälls- och yrkesrelaterade situationer. I undervisningen ska eleverna ges möjlighet att utmana, fördjupa och bredda sin kreativitet och sitt matematikkunnande. Vidare ska den bidra till att eleverna utvecklar förmåga att sätta in matematiken i olika sammanhang och se dess betydelse för individ och samhälle.

Undervisningen ska innehålla varierade arbetsformer och arbetssätt, där undersökande aktiviteter utgör en del. När så är lämpligt ska undervisningen ske i relevant praxisnära miljö. Undervisningen ska ge eleverna möjlighet att kommunicera med olika uttrycksformer. Vidare ska den ge eleverna utmaningar samt erfarenhet av matematikens logik, generaliserbarhet, kreativa kvaliteter och mångfacetterade karaktär. Undervisningen ska stärka elevernas tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang samt ge utrymme åt problemlösning som både mål och medel. I undervisningen ska eleverna dessutom ges möjlighet att utveckla sin förmåga att använda digital teknik, digitala medier och även andra verktyg som kan förekomma inom karaktärsämnena.

Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att:

1. använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.
2. hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.
3. formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat.
4. tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.
5. följa, föra och bedöma matematiska resonemang.
6. kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.
7. relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.

Kunskapskrav Matematik kurs 3b och 3c

Betyget E Eleven kan **översiktligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **översiktligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena **i bekanta situationer**. I arbetet hanterar eleven **några enkla** procedurer och löser uppgifter av standardkaraktär **med viss säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av enkel karaktär**. Dessa problem inkluderar **ett fåtal** begrepp och kräver **enkla** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att tillämpa **givna** matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier och metoder.

Eleven kan föra **enkla** matematiska resonemang och värdera med **enkla** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **med inslag av** matematiska symboler och andra representationer.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **kursens innehåll** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **enkla** resonemang om exemplens relevans.

Betyget D Betyget D innebär att kunskapskraven för E och till övervägande del för C är uppfyllda.

Betyget C Eleven kan **utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade aritmetiska och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja och** tillämpa matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade** matematiska resonemang och värdera med **nyanserade** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra enkla matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med viss anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade** resonemang om exemplens relevans.

Betyget B Betyget B innebär att kunskapskraven för C och till övervägande del för A är uppfyllda.

Betyget A Eleven kan **definiera och utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **flera** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa **komplexa** matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade aritmetiska och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet och på ett effektivt sätt**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av komplex karaktär**. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. **I problemlösning upptäcker eleven generella samband som presenteras med symbolisk algebra**. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja**, tillämpa **och anpassa** matematiska modeller. Eleven kan med **nyanserade** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade och nyanserade** matematiska resonemang, värdera med **nyanserade** omdömen **och vidareutveckla** egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med god anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade och nyanserade** resonemang om exemplens relevans.

Centralt innehåll Matematik kurs 3b

Undervisningen i kursen ska behandla följande centrala innehåll:

Algebra

A1	Begreppen polynom och rationella uttryck samt generalisering av aritmetikens lagar till hantering av dessa begrepp.
A2	Algebraiska och grafiska metoder för att lösa polynomekvationer av högre grad.

Samband och förändring

F6	Användning av begreppet geometrisk summa samt linjär optimering i tillämpningar som är relevanta för karaktärsämnena.
F7	Orientering kring kontinuerlig och diskret funktion samt begreppet gränsvärde.
F8	Egenskaper hos polynomfunktioner av högre grad.
F9	Begreppen sekant, tangent, ändringskvot och derivata för en funktion.
F10	Härledning och användning av deriveringsregler för potens- och exponentialfunktioner samt summor av funktioner.
F11	Introduktion av talet e och dess egenskaper.
F12	Algebraiska och grafiska metoder för bestämning av derivatans värde för en funktion.
F13	Algebraiska och grafiska metoder för lösning av extremvärdesproblem inklusive teckenstudium och andraderivatan.
F14	Samband mellan en funktions graf och funktionens första- och andraderivata.
F15	Begreppen primitiv funktion och bestämd integral samt sambandet mellan integral och derivata.
F16	Bestämning av enkla integraler i tillämpningar som är relevanta för karaktärsämnena.

Problemlösning

P1	Strategier för matematisk problemlösning inklusive användning av digitala medier och verktyg.
P3	Matematiska problem av betydelse för samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen.
P4	Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.