






Instruktioner för bedömning av delprov D

- 18.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $3 \left(\frac{1,2^n - 1}{1,2 - 1} \right) = 6\,000\,000$ +1 E_{PL}
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (71) +1 E_{PL}
-
- 19.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, tecknar ett uttryck som motsvarar en del av eller hela integralens värde, t.ex. $3 \cdot 5$ +1 E_{PL}
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (27,5) +1 E_{PL}
- Kommentar:* Även svaret 27,5 a.e. anses godtagbart i denna uppgift.
-
- 20.** **Max 2/2/0**
- a) Godtagbar ansats, t.ex. ställer upp ekvationen $33\,700 e^{-0,034t} = 20\,000$ +1 E_M
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (15 månader) +1 E_M
- b) Godtagbar ansats, t.ex. deriverar $V(t)$ och beräknar $V'(0)$ +1 C_M
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (20 månader) +1 C_M
- Kommentar:* En lösning i b)-uppgiften som utan kommentar eller förklaring utgår från ekvationen $33\,700 e^{-0,034t} = \frac{33700}{2}$ ges noll poäng.
-
- Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar* 
-
- 21.** **Max 0/4/0**
- Godtagbar ansats, t.ex. identifierar vilket område som ska undersökas +1 C_{PL}
- med godtagbar bestämning av de relevanta skärningspunkterna (350, 625), (220, 560) och (350, 300) +1 C_{PL}
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (t.ex. ”Minsta värdet är -2000 och största värdet är 115000.”) +1 C_{PL}
- Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 C_K

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar 

- 22.** **Max 0/0/2**
- Godtagbar ansats, visar insikt om att funktionens derivata ska undersökas, t.ex. genom att använda att $V''(t) = 0$ och teckna ekvationen $0,6t - 2,46 = 0$ +1 A_M
- med i övrigt godtagbar lösning, där $V'(4,1)$, $V'(0)$ och $V'(6)$ undersöks, med godtagbart svar ("Mellan 1,5 kg/år och 6,5 kg/år.") +1 A_M
- Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar* 
- 23.** **Max 0/0/2**
- Godtagbar ansats, inleder ett välgrundat generellt och nyanserat resonemang genom att konstatera att positiv derivata innebär att funktionen är (strängt) växande +1 A_R
- med godtagbart slutfört resonemang med korrekt slutsats (En reell lösning) +1 A_R
- Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar* 
- 24.** **Max 0/2/3**
- a) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar areafunktionen $A(x) = x(-0,5x^3 + x + 3)$ +1 C_M
- med godtagbar grafisk/numerisk bestämning av sidlängden inklusive verifiering av maximum (1,43 dm) +1 C_M
- b) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $-0,5x^3 + x + 3 = x$ +1 A_M
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (1,82 dm) +1 A_M
- Lösningen (till deluppgift a och b) kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 A_K
- Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar* 

25.

Max 0/0/3

Godtagbar ansats, t.ex. sätter diskriminanten lika med noll i ekvationen

$$f'(x) = 0 \text{ eller tecknar ekvationssystemet } \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f''(x) = 0 \end{cases} \quad +1 \text{ A}_{\text{PL}}$$

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($k = 8, 7$) +1 A_{PL}

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 A_K

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar



Uppgift 20

Elevlösningsexempel 20.1 (2 E_M)

$$a) V(t) = 33700 e^{-0,034t}$$

$$20000 = 33700 e^{-0,034t}$$

$$\frac{20000}{33700} = e^{-0,034t}$$

$$\ln\left(\frac{20000}{33700}\right) = -0,034t$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{20000}{33700}\right)}{-0,034}$$

$$t \approx 15$$

SVAR: 15 mån efter
inlöpet

$$b) \frac{33700}{2} = 33700 e^{-0,034t}$$

$$0,5 = e^{-0,034t}$$

$$\ln 0,5 = -0,034t$$

$$t = \frac{\ln 0,5}{-0,034}$$

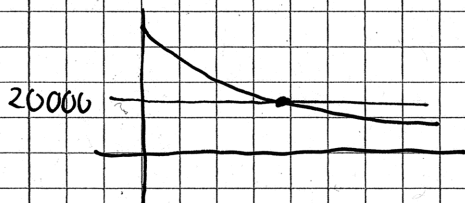
$$t = 20$$

SVAR: 20 mån efter
inlöpet

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en korrekt löst a)-uppgift vilket ger två modelleringspoäng på E-nivå. I b)-uppgiften ges ingen kommentar om varför den tecknade ekvationen kan ge ett korrekt svar, vilket ger noll poäng. Sammantaget ges lösningen två modelleringspoäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 20.2 (2 E_M och 2 C_M)

$$a) 33700 e^{-0,034t} = 20000$$

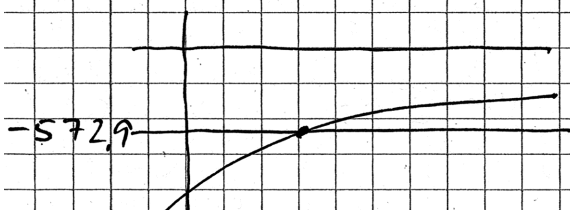


Intersect $t = 15,3$ mån

$$b) V'(t) = -1145,8 e^{-0,034t}$$

$$V'(0) = -1145,8$$

$$V'(0)/2 = -572,9$$



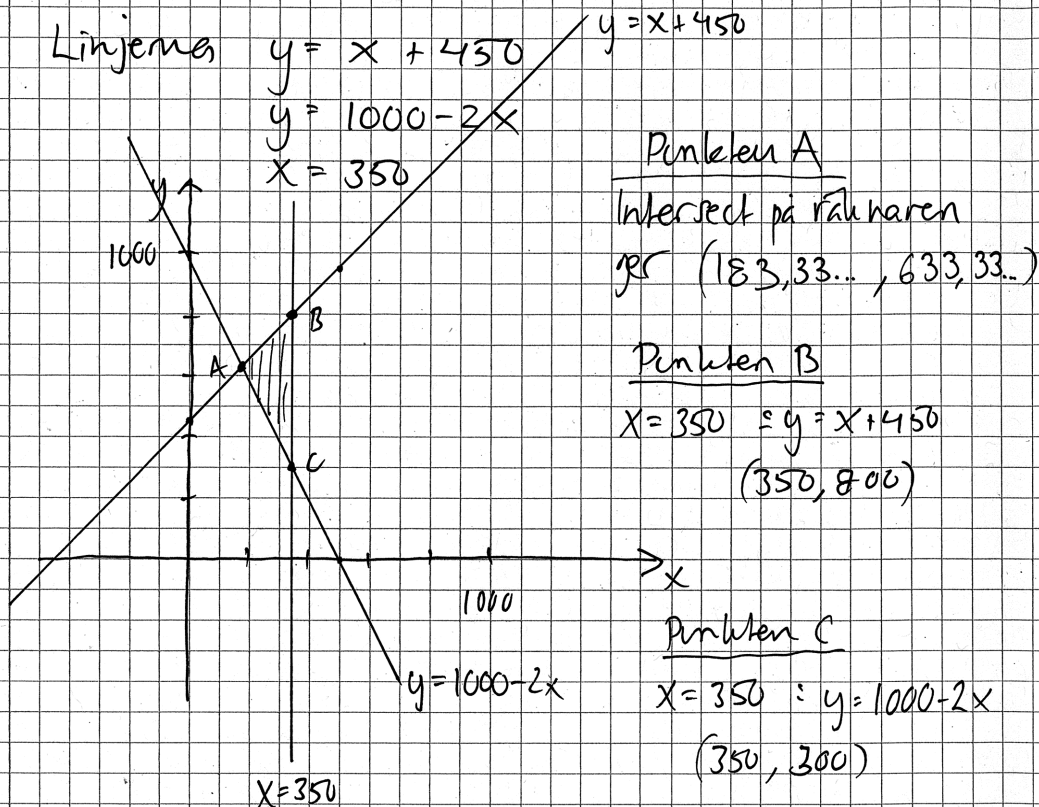
Intersect $t = 20,4$ mån

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en knapphändig men godtagbar lösning till de båda deluppgifterna där digitala hjälpmedel använts. Trots lösningens knapphändighet anses den nätt och jämnt uppfylla kraven för två modelleringspoäng på E-nivå och två modelleringspoäng på C-nivå.

Uppgift 21

Elevlösningsexempel 21.1 (2 C_{PL} och 1 C_K)

$$\begin{cases} 2y - x \leq 900 \\ y + 2x \geq 1000 \\ x \leq 350 \end{cases} \quad V = 500x - 200y$$



Största och minsta värde

$$V = 500x - 200y$$

$$(183,33\dots, 633,33) \quad V = 500 \cdot 183,33\dots + 200 \cdot 633,33 = -35000$$

$$(350, 800) \quad V = 500 \cdot 350 - 200 \cdot 800 = 15000$$

$$(350, 300) \quad V = 500 \cdot 350 - 200 \cdot 300 = 115000$$

SVAR

Största värdet: 115000

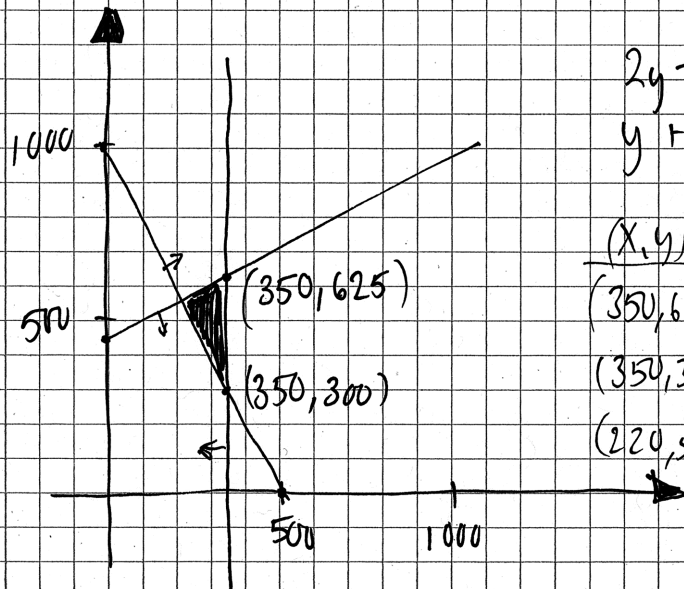
Minsta värdet: -35000

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen är korrekt förutom i inledningen ($y = x + 450$). Detta fel får till följd att minsta värdet blir felaktigt. Felet anses inte förenkla komplexiteten i den fortsatta lösningen och därmed ges elevlösningen den andra och tredje problemlösningspoängen, men inte den första (följdfel, se sid. 4). När det gäller kommunikation anses uppgiften, trots felet i inledningen, vara löst i sin helhet. Lösningen anses uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 21.2 (3 C_{PL} och 1 C_K)

$$\begin{cases} 2y - x \leq 900 \\ y + 2x \geq 1000 \\ x \leq 350 \end{cases}$$

$$V = 500x - 200y$$



Intersecterar alla linjerna
slår i $(220, 560)$

$$\begin{cases} 2y - x = 900 \\ y + 2x = 1000 \end{cases}$$

(x, y)	$V = 500x - 200y$
$(350, 625)$	$= 50000$
$(350, 300)$	$= 115000$ — störst!
$(220, 560)$	$= -2000$ — minst!

Bedömningskommentar till exemplet: Uppgiften är löst i sin helhet och korrekt. Därmed uppfylls kraven för tre problemlösningspoäng på C-nivå. När det gäller kommunikation är lösningen strukturerad samt möjlig att följa och förstå, trots att redovisningen av två av skärningspunkterna saknas och att lösningen är allmänt kortfattad. Elevlösningen anses nått och jämnt uppfylla kraven för kommunikationspoängen på C-nivå.

Uppgift 22

Elevlösningsexempel 22.1 (1 A_M)

$$V(t) = 0,10t^3 - 1,23t^2 + 6,51t + 3,72$$

$$V'(t) = 0,30t^2 - 2,46t + 6,51$$

t	V'(t)
0	$= 0,30 \cdot 0^2 - 2,46 \cdot 0 + 6,51 \approx 6,51$
1	$= 0,30 \cdot 1^2 - 2,46 \cdot 1 + 6,51 \approx 4,35$
2	$= 0,30 \cdot 2^2 - 2,46 \cdot 2 + 6,51 \approx 2,79$
3	$= 0,30 \cdot 3^2 - 2,46 \cdot 3 + 6,51 \approx 1,83$
4	$= 0,30 \cdot 4^2 - 2,46 \cdot 4 + 6,51 \approx 1,47$
5	$= 0,30 \cdot 5^2 - 2,46 \cdot 5 + 6,51 \approx 1,71$
6	$= 0,30 \cdot 6^2 - 2,46 \cdot 6 + 6,51 \approx 2,55$

Niktens ändringshastighet kan vara

$$1,47 \leq V'(t) \leq 6,51$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar insikt om att derivatans största och minsta värde ska undersökas. Lösningen visar hur ett närliggande värde till derivatans nollställe, $x = 4$, erhålls med hjälp av heltalsprövning. Denna prövning styrker dock inte att det endast finns ett nollställe till derivatan i det aktuella intervallet och inte heller att ett nollställe verkligen hittats. Därmed finns ingen grund för slutsatsen $1,47 \leq V'(t) \leq 6,51$ *. Sammantaget ges elevlösningen första modelleringspoängen på A-nivå.

* Däremot, om prövningen varit mer systematisk kring $x = 4$, minimum då $x = 4,1$ styrkts genom diskussion om symmetriegenskaper hos andragsgradsfunktionen V' och lösningen i övrigt varit godtagbar skulle två modelleringspoäng på A-nivå kunna erhållas.

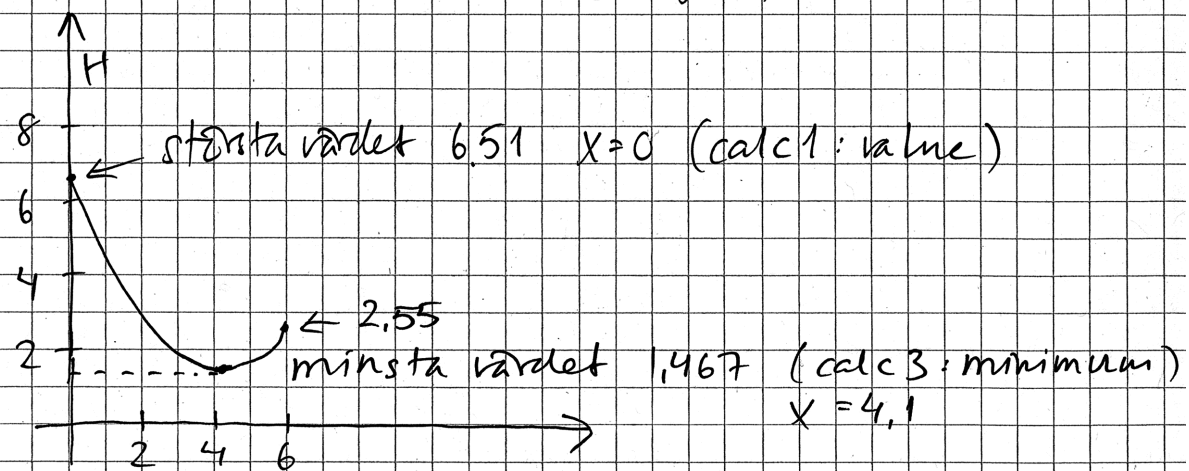
Elevlösningsexempel 22.2 (2 AM)

$$U(t) = 0,10t^3 - 1,23t^2 + 6,51t + 3,72$$

Hastigheten på vikten är

$$H(t) = 0,30t^2 - 2,46t + 6,51$$

På räknaren ritas jag grafen $H(t)$



Hastigheten på vikten varierar mellan
1,467 kg/år och 6,51 kg/år

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas hur ändringshastigheten undersöks på grafräknaren. Grafen är begränsad till det aktuella intervallet och visar insikt om vilka tre värden som ska undersökas. Det största och minsta värdet har bestämts med hjälp av grafräknaren. Funktionsvärdet 2,55 är inte nödvändigt att bestämma då figuren tydligt visar det största och minsta värdet inom det aktuella intervallet. Elevlösningen ges två modellerspoäng på A-nivå.

Uppgift 23

Elevlösningsexempel 23.1 (0 poäng)

$$\text{Om } f(x) = 2x + 4 \text{ är } f'(x) = 2 \text{ dvs } > 0$$

för alla x

$$2x + 4 = 0$$

$$x = -2$$

alltså finns bara en reell
lösning då $f'(x) > 0$

Bedömningskommentar till exemplet: Eftersom slutsatsen baseras på ett specialfall och inte en generell behandling ges elevlösningen noll poäng.

Elevlösningsexempel 23.2 (1 AR)

Om grafen aldrig har negativ lutning ($= f'(x) > 0$) så kan den bara skära x -axeln ($f(x) = 0$) max en gång, eftersom efter den skurit x -axeln så kommer värdet bara att öka (grafens går uppåt).

Bedömningskommentar till exemplet: Av elevlösningen framgår att positiv derivata innebär att funktionen är växande. Däremot påstås att grafen skär x -axeln "max en gång", vilket är felaktigt, och det framgår inte tydligt att ekvationen $f(x) = 0$ har en reell lösning. Sammantaget anses elevlösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för den första resonemangspoängen på A-nivå.

Elevlösningsexempel 23.3 (2 AR)

$f'(x) > 0$ för alla x
 \downarrow
 Om $f'(x) > 0$ så är $f(x)$ bara växande.
 \Rightarrow Alltså inga max- eller minpunkter.
 Ingen terrasspunkt heller. Då finns det en reell lösning för $f(x) = 0$ och det är där funktionen skär x -axeln.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen ges ett resonemang som leder fram till den korrekta slutsatsen att ekvationen har en reell lösning. Informationen "Alltså inga max- eller minpunkter. Ingen terrasspunkt heller." är inte nödvändig för att resonemanget ska anses vara fullständigt men tydliggör resonemanget. Lösningen bedöms uppfylla kraven för två resonemangspoäng på A-nivå.

Uppgift 24

Elevlösningsexempel 24.1 (1 C_M och 2 A_M)

$$a) A = x \cdot y = x(-0,5x^3 + x + 3) \text{ där } x \text{ är bredden}$$

$$A = -0,5x^4 + x^2 + 3x$$

$$A' = -2x^3 + 2x + 3 \quad A' = 0$$

$$0 = -2x^3 + 2x + 3 \quad \text{Miniräkarens Equation}$$

$$x = 1,431... \approx 1,43$$

$$b) A = x^2 \quad 2,179 > x > 0$$

$$x = 4$$

$$x = -0,5x^3 + x + 3$$

$$0 = -0,5x^3 + 3$$

$$x \approx 1,817$$

Bedömningskommentar till exemplet: Lösningen till deluppgift a) är godtagbar förutom att verifiering av maximum saknas och därmed ges den första modelleringspoängen på C-nivå men inte den andra. Lösningen till deluppgift b) är korrekt vilket ger två modelleringspoäng på A-nivå. Eftersom verifieringen saknas i deluppgift a) anses inte uppgiften vara löst i sin helhet och därmed bedöms inte kommunikation. Sammantaget ges elevlösningen en modelleringspoäng på C-nivå och två modelleringspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 24.2 (2 C_M, 2 A_M och 1 A_K)

a) Arean för servestema blir xy

$$y = -0.5x^3 + x + 3$$

ins y i xy ger det

$$x(-0.5x^3 + x + 3) = A$$

$$A = -0.5x^4 + x^2 + 3x$$

Extrempunkterna är då $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 2x - 2x^3 + 3$$

$$0 = 2x - 2x^3 + 3$$

Equation ger mig $x = 1.431$

Jag ritar upp $f'(x)$ på räknaren och ser att derivatan är negativ då $x = 1.43$, dvs. max!

b) Om servestema ska SVAR: Bredden är 1.43 dm

vara kvadratiska innebär det att $y = x$

vilket ger ekvationssystemet

$$y = x$$

$$y = -0.5x^3 + x + 3$$

$$x = -0.5x^3 + x + 3$$

$$0 = -0.5x^3 + 3$$

$$x = \sqrt[3]{6}$$

SVAR: Bredden är $\sqrt[3]{6}$ dm

Bedömningskommentar till exemplet: Lösningen till deluppgift a) och b) är korrekta och ges därmed två modelleringspoäng på C-nivå och två modelleringspoäng på A-nivå. När det gäller kommunikation anses lösningen vara lätt att följa och förstå förutom att variabeln x inte är definierad och att det inte tydligt framgår hur verifiering av maximum utförts på räknaren. I deluppgift b) anges svaret i exakt form vilket bedöms som godtagbart. Sammantaget anses elevlösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för kommunikationspoängen på A-nivå.

Uppgift 25

Elevlösningsexempel 25.1 (2 APL)

$$f(x) = x^3 + kx^2 + 2,9kx$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2kx + 2,9k$$

$$f''(x) = 6x + 2k$$

$$(1) \quad 3x^2 + 2kx + 2,9k = 0$$

$$(2) \quad 6x + 2k = 0$$

$$(2) \quad 6x + 2k = 0$$

$$k = -3x$$

sätt in i (1)

$$3x^2 + 2 \cdot (-3x) \cdot x + 2,9 \cdot (-3x) = 0$$

$$3x^2 - 6x^2 - 8,7x = 0$$

$$-3x^2 - 8,7x = 0$$

$$x^2 + 2,9x = 0$$

$$x = \frac{-2,9 \pm \sqrt{(2,9)^2}}{2} = \frac{-2,9 \pm 2,9}{2}$$

$$x_1 = 0 \quad \rightarrow k_1 = -3 \cdot 0 = 0$$

$$x_2 = -2,9 \quad \rightarrow k_2 = -3 \cdot (-2,9) = 8,7$$

$k > 0$ bortse från ena roten

SVAR: $k = 8,7$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen tecknas ett korrekt ekvationssystem som mynnar ut i ett korrekt svar. Därmed ges två problemlösningspoäng på A-nivå. När det gäller kommunikation är elevlösningen inte helt lätt att följa och förstå i inledningen eftersom det inte framgår varför andraderivatan sätts till noll. Parenteser runt negativa tal saknas. Därmed anses inte kraven för kommunikationspoängen på A-nivå vara uppfyllda.

Elevlösningsexempel 25.2 (1 A_{PL} och 1 A_K)

$$f(x) = x^3 + kx^2 + 2,9kx$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2kx + 2,9k$$

$$3x^2 + 2kx + 2,9k = 0$$

$$x^2 + \frac{2k}{3}x + \frac{2,9k}{3} = 0$$

$$x = \frac{-k}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{-k}{3}\right)^2 - \frac{2,9k}{3}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{-k}{3}\right)^2 - \frac{2,9k}{3}} = 0$$

$$\frac{k^2}{9} = \frac{2,9k}{3}$$

$$k = 3 \cdot 2,9 = 8,7$$

Vid en terrasspunkt har $f'(x)$ bara ett nollställe
Eftersom det bara ska finnas ett nollställe är

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen tecknas ekvationen $f'(x) = 0$ och diskriminanten sätts lika med noll. Lösningen av andragradsekvationen är felaktig då endast en lösning presenteras utan att det förklaras varför. Därmed uppfylls inte kraven för den andra problemlösningspoängen på A-nivå. När det gäller kommunikation anses uppgiften vara löst i sin helhet (trots den felaktiga ekvationslösningen) och är i övrigt lätt att följa och förstå eftersom det framgår varför diskriminanten sätts lika med noll. Lösningen är välstrukturerad och innehåller korrekt använda symboler. Kraven för kommunikationspoängen på A-nivå anses därmed vara uppfyllda.