Part B	Problems 1–11 which only require answers.
Part C	Problems 12–17 which require complete solutions.
Test time	120 minutes for Part B and Part C together.
Resources	Formula sheet and ruler.

Level requirements

The test consists of an oral part (Part A) and three written parts (Part B, Part C and Part D). Together they give a total of 67 points consisting of 24 E-, 24 C- and 19 A-points.

Level requirements for test grades
E: 18 points
D: 27 points of which 8 points on at least C-level
C: 35 points of which 14 points on at least C-level
B: 45 points of which 6 points on A-level
A: 54 points of which 11 points on A-level

The number of points you can get for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge levels (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled "*Only answer is required* " you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

Name: ____

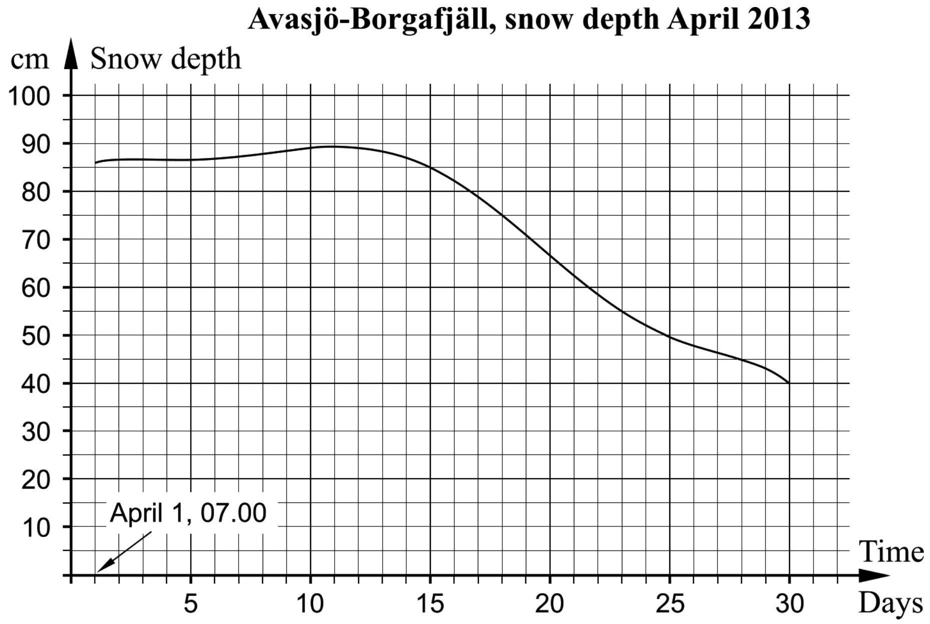
Date of birth: ____________________________________

Educational programme: ______________________________

Part B: Digital resources are not allowed. *Only answer is required*. Write your answers in the test booklet.

1. Evaluate $|5-8|$ _______________ (1/0/0)

2. Avasjö-Borgafjäll is a weather observation station where SMHI collects weather data. The diagram shows how the snow depth (in cm) varies over one month, starting April 1, 2013 at 07.00.



Answer the following questions by using the diagram.

a) At what average rate of change in cm/day does the snow depth decrease over the period April 15, 07.00 to April 30, 07.00? _______________ (1/0/0)

b) Determine the rate of change in cm/day for the snow depth on April 11, 07.00. _______________ (1/0/0)

c) When does the snow depth decrease the fastest? Choose one of the alternatives A–E.

A. April 1
B. April 11
C. April 14
D. April 20
E. April 28 _______________ (1/0/0)

3. For what value of x is the expression $\dfrac{2x+10}{3x-6}$ not defined? ________________________ (1/0/0)

4. Simplify $x^2(x^3+9)-(3x)^2$ as far as possible. ________________________ (1/0/0)

5. Find $f'(x)$ if

a) $f(x)=3x^4+x^2-5$ $\quad f'(x)=$ ________________________ (1/0/0)

b) $f(x)=\dfrac{kx-1}{4}$ $\quad f'(x)=$ ________________________ (0/1/0)

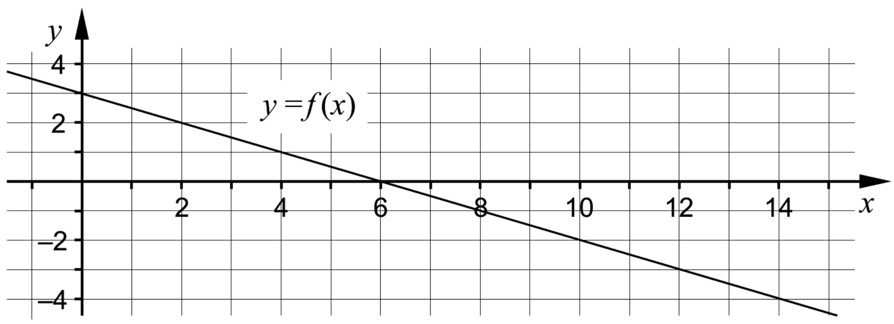
6. The alternatives A–H show different trigonometric expressions.

A. $\sin 40^\circ$	B. $\sin 80^\circ$	C. $\sin 120^\circ$	D. $\sin 160^\circ$
E. $\sin 200^\circ$	F. $\sin 240^\circ$	G. $\sin 280^\circ$	H. $\sin 320^\circ$

a) Which of the alternatives A–H shows the expression with the largest value? ________________________ (1/0/0)

b) Which of the alternatives A–H shows the expression with the smallest value? ________________________ (0/1/0)

7. The graph of the function f is a straight line, see figure.



Find the upper bound a where $a \neq 0$

so that $\int_0^a f(x)\,dx = 0$ ________________________ (0/1/0)

8. The function f describes the number of inhabitants in a municipality as a function of time t, where t is the time in years after January 1, 2013.

There are four empty boxes in the figure. Write suitable numbers and symbols in the boxes so the interpretation of the equality is:

During the period January 1 2015 to January 1 2020, the number of inhabitants increases by 45 107.

$$\int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{}\,\mathrm{d}t = \boxed{}$$

(0/1/1)

9. Determine $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x}{5x}$ ________________________ (0/0/1)

10. A circle with a radius of 5 length units touches the positive x-axis and the negative y-axis.
Find the equation of the circle. ________________________ (0/0/1)

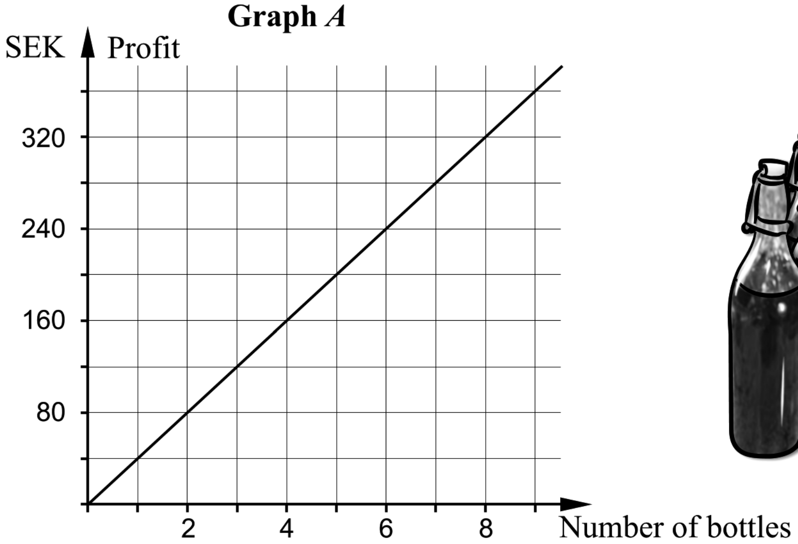
11. The derivative of $f(x) = \sqrt{\pi}\cdot\sqrt{x}$ can be written in the form $f'(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{ax}}$
Determine the constant a. ________________________ (0/0/1)

Part C: Digital resources are not allowed. Write down your solutions on separate sheets of paper.

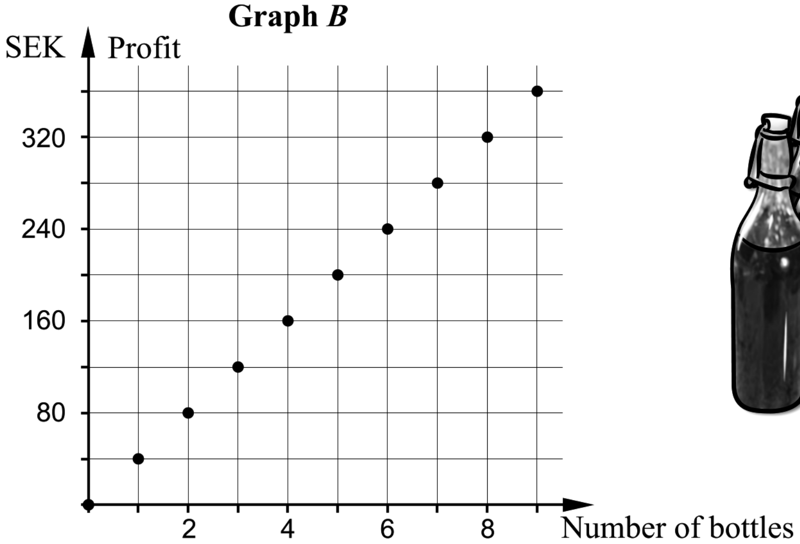
12. Daniel and Jakob sell bilberry lemonade. The price of each bottle is SEK 40. Which of the graphs, *A* or *B*, best describes the profit of the lemonade sale? Justify your answer.

(1/0/0)

Graph *A*



Graph *B*



13. It holds for the function f that $f(x) = x^3 - 12x$
Use the derivative to determine the coordinates for any maximum points, minimum points and saddle points for the graph to the function.

Determine also the characteristics for each point, that is whether it is a maximum point, minimum point, or saddle point.

(3/1/0)

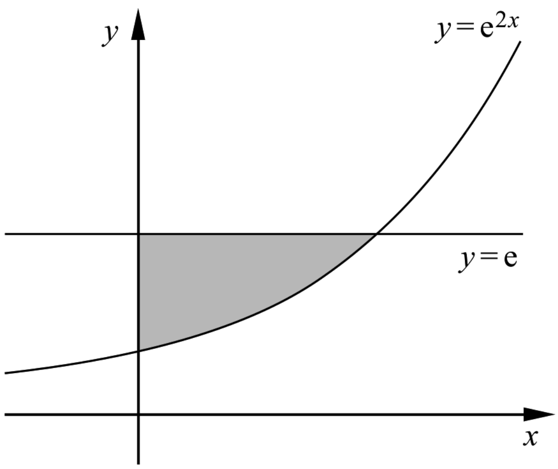
14. Evaluate the integrals algebraically.

a) $\displaystyle\int_0^3 (x^2 - 2)\,\mathrm{d}x$ (2/0/0)

b) $\displaystyle\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x$ (0/2/0)

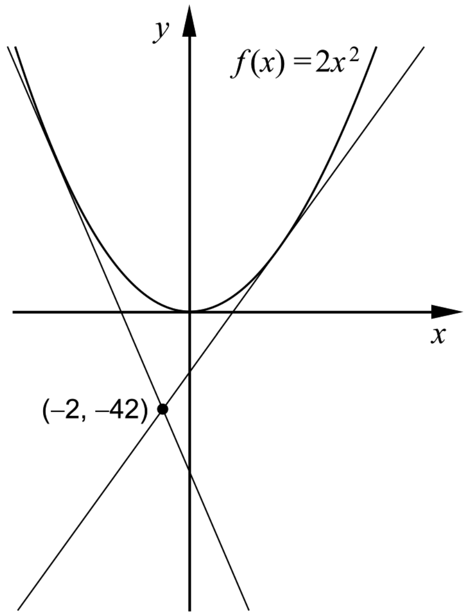
15. Solve the equation $\dfrac{3}{9-3x} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3-x}$ (0/2/0)

16. The grey shaded region in the figure is bounded by the curve $y = \mathrm{e}^{2x}$, the line $y = \mathrm{e}$ and the positive y-axis.



Calculate the area of the grey shaded region algebraically and give your answer in the simplest possible form. (0/3/0)

17. It holds for the function f that $f(x) = 2x^2$. The graph of the function has two tangents that pass through the point $(-2, -42)$, see figure.



Find the equation for one of the two tangents algebraically. (0/0/4)

Part D	Problems 18–26 which require complete solutions.
Test time	120 minutes.
Resources	Digital resources, formula sheet and ruler.

Level requirements

The test consists of an oral part (Part A) and three written parts (Part B, Part C and Part D). Together they give a total of 67 consisting of 24 E-, 24 C- and 19 A-points.

Level requirements for test grades
E: 18 points
D: 27 points of which 8 points on at least C-level
C: 35 points of which 14 points on at least C-level
B: 45 points of which 6 points on A-level
A: 54 points of which 11 points on A-level

The number of points you can get for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge levels (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled "*Only answer is required* " you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures and show how you use your digital resources.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

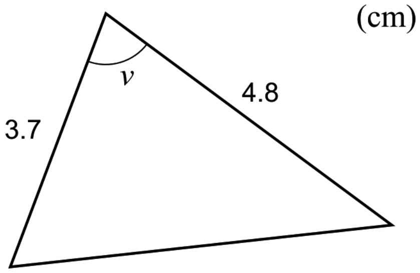
Name: ____

Date of birth: ____

Educational programme: ________________________________

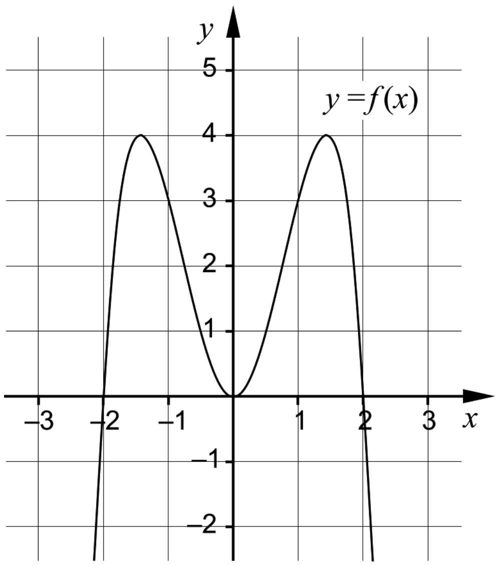
Part D: Digital resources are allowed. Write down your solutions on separate sheets of paper.

18. Find a value of the angle v so that the area of the triangle is 6.5 cm^2. (2/0/0)



19. It holds for the function f that $f'(x) = 4x^3$
Determine $f(x)$ so that $f(5) = 282$ (2/0/0)

20. It holds for the function f that $f(x) = 4x^2 - x^4 + A$ where A is a constant. The figure shows the graph of the function f when $A = 0$



a) Sabina claims:
– The function always has three extreme points, regardless of the value of the constant A.
Is Sabina right? Justify your answer. (1/0/0)

b) Sabina investigates $f(x) = 4x^2 - x^4$ and claims:
– The second derivative of $f(x) = 4x^2 - x^4$ *is less than 10 for all x.*
Is Sabina right? Justify your answer. (0/1/0)

21. The society Lyckans IF wants to make a prognosis of the number of members for coming years. After studying the number of members during the last few years, they set up the model

$f(t) = 1250e^{0.012 \cdot t}$

where $f(t)$ is the number of members and t is the time in years after January 1, 2010.

a) Determine in what year the society has 2000 members according to the model. (2/0/0)

b) Determine how fast the number of members increases on January 1, 2030 according to the model. (0/2/0)

There are also other models that describe the number of members as a function of time. One such model is

$g(t) = 1250 + 16t$

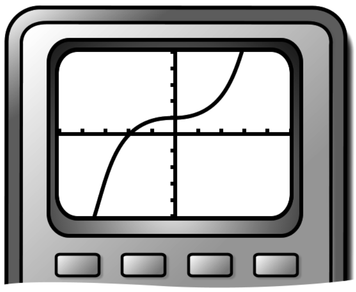
where $g(t)$ is the number of members and t is the time in years after January 1, 2010.

Lyckans IF wants to investigate how the prognosis for the number of members depends on which model they use. They will therefore investigate the difference in the number of members between the two models by using a new function.

c) Write down the new function and use it to determine at what value of t the difference in the number of members is the largest within the interval $0 \leq t \leq 15$ (0/3/0)

22. Peder draws the graph of $f(x) = x^3 + 0.03x + 1$ on his graphic calculator and says:

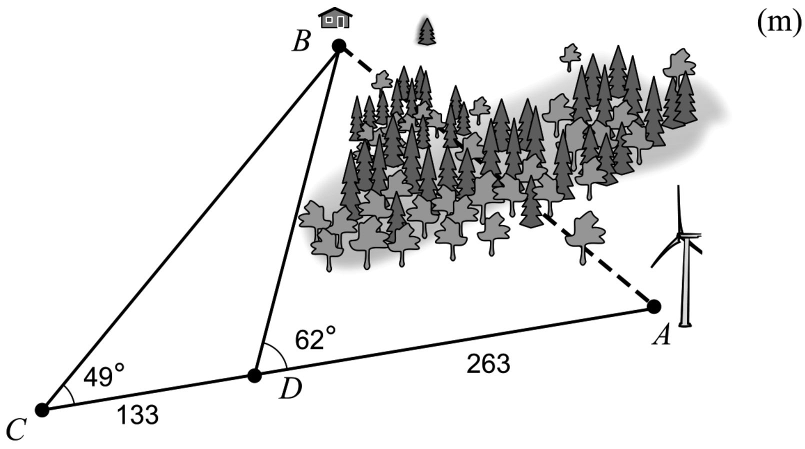
– I see that there is a saddle point on the graph.



Investigate whether he is right. (0/2/0)

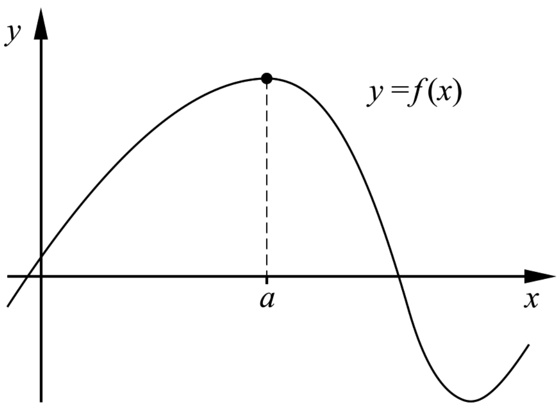
23. A land owner is going to determine the distance between two spots, marked A and B in the figure.

The land owner is at A but cannot see B due to the forest. From the two points C and D, which together with A lie on a straight line, she can see B. She measures angles and distances, see figure.



Calculate the distance AB. (0/3/0)

24. The figure shows the graph of the function f.



Use the figure and explain why the second derivative of the function is negative at the maximum point where $x = a$. (0/0/2)

25. Prove the law of cosine $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ for the case when the angle A is acute. (0/0/2)

26. Amira is going to make concrete birdbaths. The birdbaths consist of four sides that will be mounted on a rectangular bottom plate. She wants the bird baths to have a large enough bottom area and that the sides should not be too high. She therefore writes down the following conditions:

- The depth, from the upper rim to the bottom plate, must be 8 cm.
- The bottom plate must have a thickness of 4 cm.

See figure 1.

- One of the sides must be 6 cm thick.
- Three of the sides must be 4 cm thick.
- The bottom area, that is the area inside the birdbaths, must be 900 cm^2.

See figure 2.

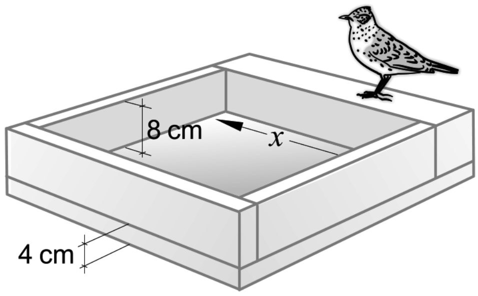


Figure 1.
A birdbath seen from the side.

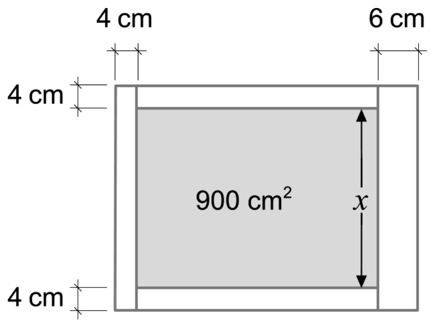


Figure 2.
A birdbath seen from above.

Amira wants to use as little concrete as possible and will therefore calculate how much concrete is needed for each birdbath. She assumes that one side of the bottom area is x cm. See figures above.

Write down a function that gives the volume of concrete as a function of x. Then use your function to determine the smallest volume of concrete Amira needs for each birdbath. (0/0/4)

To the student – information about the oral part

You will be given a problem that you will solve in writing, and then you will present your solution orally. If you need, you can ask your classmates or your teacher and use your textbook for help when solving the problem. Your oral presentation starts with you presenting the problem and then you describe and explain your solution. You must present all steps in your solution. However, if you have done the same calculation several times (for example in a table) it might be sufficient if you present only a few of the calculations. Your presentation should take a maximum of 5 minutes, and be held to a smaller group of your classmates and one or more teachers.

The problem given to you should, on the whole, be solved algebraically. You might need a calculator to do some of the calculations but, when presenting your solution, you should avoid referring to the use of your calculator for drawing graphs and/or symbolic handling (if that is the type of calculator you are using).

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution, and
- how well you use mathematical terminology.

How complete, relevant and structured your presentation is
Your presentation must contain the necessary parts in order for a listener to follow and understand your thoughts. What you say should be in a suitable order and be relevant. The listener must understand how calculations, descriptions, explanations and conclusions are connected with each other.

How well you describe and explain the train of thought behind your solution
Your presentation should contain both descriptions and explanations. To put it simple, a description answers the question “*How?*” and an explanation answers the question “*Why?*”. You describe something when you for instance tell *how* you have done a calculation. You explain something when you for instance justify *why* you could use a certain formula.

How well you use mathematical terminology
In your presentation you should use a language that contains mathematical terms, expressions and symbols suitable for the problem you have solved.

Mathematical terms are for example words like “exponent”, “function” and “graph”.
An example of a mathematical expression is that x^2 is read “x to the power 2” or “x squared”.
Some examples of mathematical symbols are π and $f(x)$, which are read “pi” and “f of x”.

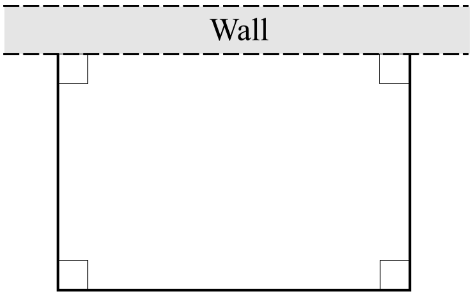
Problem 1

Name:_______________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution, and
- how well you use mathematical terminology.

A rectangular pasture will be built against a wall. There is 100 metres of fencing which should be sufficient for three of the sides since the fourth side is made up by the wall. See figure.



Use the derivative to calculate the maximum area the pasture can have.

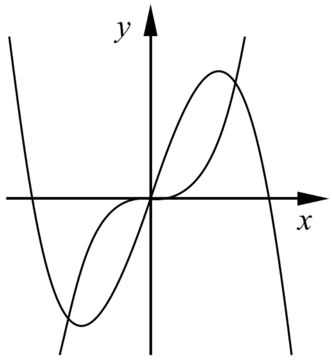
Problem 2

Name:______________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration
- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution, and
- how well you use mathematical terminology.

A region is bounded by the positive x-axis and the curves $y_1 = 4x^3$ and $y_2 = 32x - 4x^3$

Calculate the area of the region.



Problem 3

Name:________________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution, and
- how well you use mathematical terminology.

In a triangle, two sides and the intermediate angle are 12 cm, 33 cm and 95°
Calculate the remaining angles.

Problem 4

Name:________________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration
- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution, and
- how well you use mathematical terminology.

It holds for the function f that

- $f'(x) = 3x^2 - 12x$
- $f(2) = 5$

Find the smallest and the largest value of the function in the interval $-1 \leq x \leq 7$

Bedömningsmatris för bedömning av muntlig kommunikativ förmåga

Kommunikativ förmåga	**E**	**C**	**A**	**Max**
Fullständighet, relevans och struktur Hur fullständig, relevant och strukturerad elevens redovisning är.	Redovisningen kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Det finns en övergripande struktur men redovisningen kan bitvis vara fragmentarisk eller rörig. (1/0/0)		Redovisningen är fullständig och endast relevanta delar ingår. Redovisningen är välstrukturerad. (1/0/1)	(1/0/1)
Beskrivningar och förklaringar Förekomst av och utförlighet i beskrivningar och förklaringar.	Någon förklaring förekommer men tyngdpunkten i redovisningen ligger på beskrivningar. Utförligheten i de beskrivningar och de förklaringar som framförs kan vara begränsad. (1/0/0)		Redovisningen innehåller tillräckligt med utförliga beskrivningar och förklaringar. (1/0/1)	(1/0/1)
Matematisk terminologi Hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse vid enstaka tillfällen i redovisningen. (1/0/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom delar av redovisningen. (1/1/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom hela redovisningen. (1/1/1)	(1/1/1)
Summa				(3/1/3)

Innehåll

Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsanvisningar
Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt två olika modeller. Avvikelser från dessa kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.

Modell 1:

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (…)	+1 E_P

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2:

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. … 1 E_R	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. … 1 E_R och 1 C_R	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. … 1 E_R, 1 C_R och 1 A_R

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga
Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för provbetyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\approx$, $\pm$, $\sqrt{\ }$, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, x, y, $(\ )$, $[\ ]$, $\int \mathrm{d}x$, bråkstreck, index, lim, VL, HL, symbol för vinkel, gradtecken
Termer	t.ex. absolutbelopp, cirkel, enhetscirkel, polynom, rationellt uttryck, kontinuerlig/diskret funktion, rät linje, andragrads-/polynom-/potens-/ exponentialfunktion, funktionsvärde, definitions-/värdemängd, punkt, intervall, område, koordinat, koordinatsystem, graf, kurva, skärningspunkt, nollställe, symmetrilinje, lutning, riktningskoefficient, ändpunkt, sekant, tangent, ändringskvot, förändringshastighet, gränsvärde, derivata, andraderivata, teckenschema, växande/avtagande, extrempunkt, maximi-/ minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, primitiv funktion, integral, talet e, naturlig logaritm
Hänvisningar	t.ex. till derivatans definition, räta linjens ekvation, tangentens ekvation, cirkelns ekvation, enhetscirkeln, areasatsen, cosinussatsen, sinussatsen, definitionen för sinus
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

Provsammanställning – Kunskapskrav

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 3c i förhållande till nivå och förmågor. Poängen i denna tabell anges i samma ordning som i bedömningsanvisningen. Till exempel motsvarar 21a_1 och 21a_2 den första respektive andra poängen i uppgift 21a.

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
A	M_1				1								
	M_2												1
	M_3				1								
	M_4												1
	M_5				1								
	M_6								1				
	M_7												1
B	1	1											
	2a	1											
	2b	1											
	2c	1											
	3	1											
	4		1										
	5a		1										
	5b						1						
	6a	1											
	6b					1							
	7					1							
	8_1					1							
	8_2									1			
	9									1			
	10											1	
	11										1		
C	12				1								
	13_1		1										
	13_2		1										
	13_3		1										
	13_4								1				
	14a_1		1										
	14a_2		1										
	14b_1						1						
	14b_2						1						
	15_1						1						
	15_2						1						
	16_1							1					
	16_2							1					
	16_3							1					
	17_1											1	
	17_2											1	
	17_3											1	
	17_4												1
D	18_1			1									
	18_2			1									
	19_1			1									
	19_2			1									
	20a				1								
	20b								1				
	21a_1			1									
	21a_2			1									
	21b_1					1							
	21b_2					1							
	21c_1							1					
	21c_2							1					
	21c_3								1				
	22_1								1				
	22_2								1				
	23_1							1					
	23_2							1					
	23_3								1				
	24_1												1
	24_2												1
	25_1												1
	25_2												1
	26_1											1	
	26_2											1	
	26_3											1	
	26_4												1
	Total	**6**	**7**	**6**	**5**	**5**	**5**	**7**	**7**	**2**	**1**	**7**	**9**
Σ	**67**	**24**				**24**				**19**			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Provsammanställning – Centralt innehåll

Tabell 2 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 3c i förhållande till nivå och centralt innehåll. En lista över det centrala innehållet återfinns i slutet av detta häfte.

Del-prov	Uppg.	Nivå			Centralt innehåll Kurs Ma3c																
					Aritmetik, algebra och geometri				Samband och förändring										Problem-lösning		
		E	C	A	A1	A3	A4	A5	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15	F16	P1	P3	P4
A		3	1	3																	
B	1	1	0	0		X															
	2a	1	0	0							X										
	2b	1	0	0							X			X		X					
	2c	1	0	0							X			X		X					
	3	1	0	0	X																
	4	1	0	0	X																
	5a	1	0	0							X	X									
	5b	0	1	0							X	X									
	6a	1	0	0			X														
	6b	0	1	0			X														
	7	0	1	0													X	X			
	8	0	1	1													X	X			
	9	0	0	1	X				X				X								
	10	0	0	1			X												X		
	11	0	0	1							X	X									
C	12	1	0	0					X												
	13	3	1	0							X	X			X						
	14a	2	0	0													X	X			
	14b	0	2	0													X	X			
	15	0	2	0	X																
	16	0	3	0									X				X	X	X		
	17	0	0	4							X	X		X		X			X		
D	18	2	0	0				X											X		
	19	2	0	0							X						X		X		
	20a	1	0	0						X	X					X					
	20b	0	1	0							X	X		X		X					
	21a	2	0	0									X						X	X	
	21b	0	2	0							X	X	X	X		X					
	21c	0	3	0							X	X	X		X	X			X	X	
	22	0	2	0						X	X	X		X	X	X					
	23	0	3	0				X											X	X	
	24	0	0	2							X			X	X	X					
	25	0	0	2				X													
	26	0	0	4	X						X	X		X	X	X			X	X	
Total		24	24	19																	

Kravgränser

Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 67 poäng varav 24 E-, 24 C- och 19 A-poäng. Observera att kravgränserna förutsätter att eleven deltagit i alla fyra delprov, det vill säga Delprov A, B, C och D.

Kravgräns för provbetyget
E: 18 poäng
D: 27 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 35 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 45 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 54 poäng varav 11 poäng på A-nivå

Bedömningsformulär

Elev:____________________________ Klass:________________ Provbetyg: _____________

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
A	M_1												
	M_2												
	M_3												
	M_4												
	M_5												
	M_6												
	M_7												
B	1												
	2a												
	2b												
	2c												
	3												
	4												
	5a												
	5b												
	6a												
	6b												
	7												
	8_1												
	8_2												
	9												
	10												
	11												
C	12												
	13_1												
	13_2												
	13_3												
	13_4												
	14a_1												
	14a_2												
	14b_1												
	14b_2												
	15_1												
	15_2												
	16_1												
	16_2												
	16_3												
	17_1												
	17_2												
	17_3												
	17_4												

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
D	18_1												
	18_2												
	19_1												
	19_2												
	20a												
	20b												
	21a_1												
	21a_2												
	21b_1												
	21b_2												
	21c_1												
	21c_2												
	21c_3												
	22_1												
	22_2												
	23_1												
	23_2												
	23_3												
	24_1												
	24_2												
	25_1												
	25_2												
	26_1												
	26_2												
	26_3												
	26_4												
	Total												
Σ													

	Total	**6**	**7**	**6**	**5**	**5**	**5**	**7**	**7**	**2**	**1**	**7**	**9**
Σ	**67**	**24**				**24**				**19**			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Bedömningsanvisningar

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

Delprov B

1.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (3)	+1 E_B
2.		**Max 3/0/0**
a)	Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning (3) *eller* (-3)	+1 E_B
b)	Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning (0)	+1 E_B
c)	Korrekt svar (D: 20 april)	+1 E_B
3.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (2)	+1 E_B
4.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (x^5)	+1 E_P
5.		**Max 1/1/0**
a)	Korrekt svar ($12x^3 + 2x$)	+1 E_P
b)	Korrekt svar $\left(\frac{k}{4}\right)$	+1 C_P
6.		**Max 1/1/0**
a)	Korrekt svar (B: $\sin 80°$)	+1 E_B
b)	Korrekt svar (G: $\sin 280°$)	+1 C_B

7. **Max 0/1/0**

Korrekt svar (12) +1 C_B

8. **Max 0/1/1**

Korrekta integrationsgränser och värde (2, 7 och 45107) +1 C_B

Korrekt integrand ($f'(t)$) +1 A_B

Kommentar: Bedömningen till denna uppgift avviker från de beskrivna bedömningsmodellerna på sidan 3. Den andra begreppspoängen kan delas ut oavsett om den första begreppspoängen har delats ut eller inte.

9. **Max 0/0/1**

Korrekt svar $\left(\frac{2}{5}\right)$ +1 A_B

10. **Max 0/0/1**

Korrekt svar ($(x-5)^2+(y+5)^2=5^2$) +1 A_{PL}

11. **Max 0/0/1**

Korrekt svar (4) +1 A_P

Delprov C

12. **Max 1/0/0**

Godtagbart enkelt resonemang som styrker att Graf B ska väljas eftersom enbart hela flaskor ska säljas *eller* att Graf B ska väljas eftersom inkomsten beskrivs med en diskret funktion +1 E_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

13. **Max 3/1/0**

Korrekt bestämning av derivatans nollställen, $x_1 = -2$ och $x_2 = 2$ +1 E_P

med korrekt bestämning av extrempunkternas koordinater
$(-2, 16)$ och $(2, -16)$ +1 E_P

Godtagbar verifiering av extrempunkternas karaktär
(maximipunkt $(-2, 16)$ och minimipunkt $(2, -16)$) +1 E_P

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C_K

Kommentar: Bedömningen till denna uppgift avviker från de beskrivna bedömningsmodellerna på sidan 3. Den tredje procedurpoängen kan delas ut oavsett om den andra procedurpoängen har delats ut eller inte.

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

14. **Max 2/2/0**

a) Godtagbar ansats, bestämmer korrekt primitiv funktion +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (3) +1 E_P

b) Godtagbar ansats, bestämmer korrekt primitiv funktion +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $\left(\frac{15}{8}\right)$ +1 C_P

15. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t.ex. skriver om ekvationen till $\frac{3}{3-x} = \frac{1}{3}$ +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x = -6$) +1 C_P

16. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer den övre integrationsgränsen, $x = 0{,}5$ +1 C_{PL}

med godtagbar fortsättning, t.ex. korrekt beräkning av $\int_0^{0,5} e^{2x}dx$, $0{,}5e - 0{,}5$ +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (0,5 a.e.) +1 C_{PL}

Kommentar: Svar utan enhet eller med felaktig enhet godtas.

17. **Max 0/0/4**

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $4a = \dfrac{2a^2 - (-42)}{a - (-2)}$ där a är tangeringspunktens x-koordinat +1 A_{PL}

med godtagbar fortsättning, t.ex. bestämmer den ena tangeringspunktens x-koordinat, $a_1 = -7$ *eller* $a_2 = 3$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($y = -28x - 98$) *eller* ($y = 12x - 18$) +1 A_{PL}

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Delprov D

18. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $\dfrac{3{,}7 \cdot 4{,}8}{2} \sin v = 6{,}5$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (t.ex. $47°$) +1 E_{PL}

Kommentar: Även ett svar där båda vinklarna anges godtas.

19. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, bestämmer det allmänna uttrycket för funktionen, t.ex. $f(x) = x^4 + C$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($f(x) = x^4 - 343$) +1 E_{PL}

20. **Max 1/1/0**

a) Godtagbart enkelt resonemang som styrker att Sabina har rätt, t.ex. resonemang baserat på argumentet att värdet hos konstanten A endast påverkar grafens läge i y-led +1 E_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

b) Godtagbart välgrundat resonemang som styrker att Sabina har rätt, t.ex. resonemang baserat på argumentet att $y'' = 8 - 12x^2$ är maximalt 8 eftersom termen $-12x^2$ alltid är negativ eller noll +1 C_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

21. **Max 2/5/0**

a) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $1250\mathrm{e}^{0,012\cdot t}=2000$ +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (2049) +1 E_M

b) Godtagbar ansats, visar insikt om att funktionen ska deriveras, t.ex. genom att påbörja derivering av funktionen *f* +1 C_B

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar inklusive korrekt enhet (19 medlemmar/år) +1 C_B

c) Godtagbar ansats, bildar en differensfunktion t.ex.
$S=1250\mathrm{e}^{0,012\cdot t}-(1250+16t)$ +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($t=15$) +1 C_M

Lösningen (deluppgift a, b och c) kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

22. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, påbörjar ett välgrundat resonemang genom att använda en undersökningsmetod som kan ge väl underbyggda slutsatser,
t.ex. undersöker på sin grafräknare om *derivatans* graf har några nollställen +1 C_R

med godtagbart slutfört välgrundat resonemang med korrekt slutsats
(t.ex. ”Grafen till derivatan blir aldrig noll, så det är ingen terrasspunkt”) +1 C_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

23. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer vinklarna i triangeln *BCD* och någon av sidorna *BC* eller *BD* +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (398 m) +1 C_{PL}

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

24. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, påbörjar ett välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. om varför derivatan är avtagande kring punkten där $x = a$ +1 A_R

med fortsatt välgrundat och nyanserat resonemang som förklarar varför en avtagande derivata innebär en negativ andraderivata i punkten där $x = a$ +1 A_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

25. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, inleder ett bevis genom att rita en triangel, införa en lämplig höjd och använda Pythagoras sats för att teckna två relevanta ekvationer, t.ex. $\begin{cases} c^2 = h^2 + (b-x)^2 \\ a^2 = h^2 + x^2 \end{cases}$ +1 A_R

med i övrigt godtagbart slutfört bevis +1 A_R

26. **Max 0/0/4**

Godtagbar ansats, tecknar en i huvudsak korrekt volymfunktion i en variabel *eller* en korrekt volymfunktion i två variabler, t.ex. $V = 12(x+8)(y+10) - 8xy$ +1 A_M

med godtagbar fortsättning, tecknar en korrekt volymfunktion i en variabel, t.ex. $V = 12(x+8)(\frac{900}{x} + 10) - 8x \cdot \frac{900}{x}$ +1 A_M

med i övrigt godtagbar lösning inklusive verifiering av minimum med godtagbart svar (11000 cm^3) +1 A_M

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Bedömda elevlösningar

Uppgift 12

Elevlösning 12.1 (0 poäng)

Graf B för att den blir lättare att följa och har en punkt för varje flaska

Kommentar: Det framgår inte av elevlösningen att enbart hela flaskor säljs. Elevlösningen ges noll poäng.

Elevlösning 12.2 (1 E_R)

Svar: Graf B eftersom man antingen kan sälja 1 eller 2 flaskor, inget där emellan.

Kommentar: Elevlösningen visar ett enkelt godtagbart resonemang, där det framgår att man bara kan sälja hela flaskor. Elevlösningen ges en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösning 12.3 (1 E_R)

Graf B. Detta eftersom grafen måste vara en diskret funktion, vilket graf B är.

Kommentar: Elevlösningen visar ett enkelt godtagbart resonemang där det framgår att det handlar om en diskret funktion. Elevlösningen ges en resonemangspoäng på E-nivå.

Uppgift 13

Elevlösning 13.1 (3 E_P och 1 C_K)

$f(x) = x^3 - 12x$

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$

$x^2 - 4 = 0$

$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$x_1 = 2$ och $x_2 = -2$

$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = 8 - 24 = -16$

$f(-2) = -2^3 - 12 \cdot -2 = -8 + 24 = 16$

Punkterna är $(2, -16)$ och $(-2, 16)$

x	-4	-2	0	2	4
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$

$(2, -16)$ är en minimipunkt

$(-2, 16)$ är en maximipunkt

Kommentar: Uppgiften är löst i sin helhet inklusive verifiering av extrempunkter. När det gäller kommunikation är lösningen strukturerad och möjlig att följa och förstå trots att det felaktiga skrivsättet " $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$ " används, att parenteser runt negativa tal saknas och att de beräkningar som ligger bakom teckenschemat inte redovisas. Elevlösningen ges tre procedurpoäng på E-nivå samt nätt och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 17

Elevlösning 17.1 (2 A_{PL} och 1 A_K)

$f(x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x$

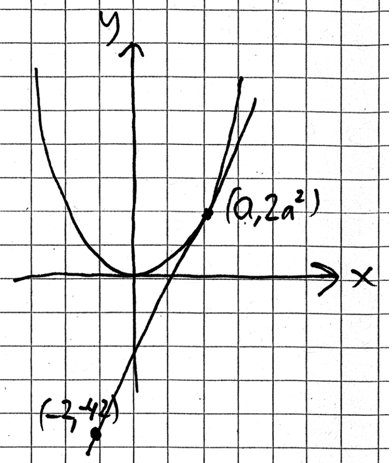
Tangentens ekvation

$y = kx + m$

Tangenten ska gå genom $(-2, -42)$ och $(a, 2a^2)$

Tangentens k-värde är värdet på $f'(x)$ i punkten a

$f'(a) = 4a \Rightarrow$ k-värdet $= 4a$



Ekv. system:

$$\begin{cases} -42 = 4a\cdot(-2) + m \\ 2a^2 = 4a\cdot a + m \end{cases}$$

$$\begin{cases} -42 = -8a + m \\ 2a^2 = 4a^2 + m \end{cases}$$

$$\begin{cases} -42 + 8a - m = 0 \\ 2a^2 + m = 0 \end{cases}$$

$$2a^2 + 8a - 42 = 0$$
$$a^2 + 4a - 21 = 0$$
$$a = -2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 21}$$
$$a = -2 \pm 5$$
$$a_1 = 3 \quad (a_2 = -7)$$

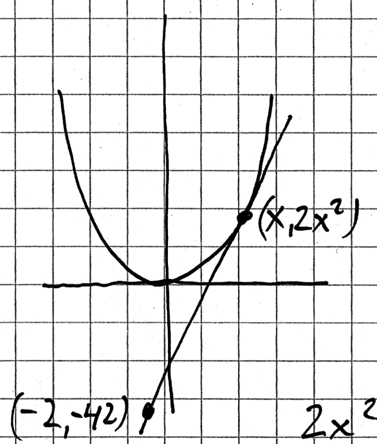
SVAR: $y = 12x + 18$

$k = 4a = 12$

$m = -8a + 42 = -8\cdot 3 + 42 = 18$

Kommentar: Uppgiften är behandlad i sin helhet och är korrekt förutom teckenfel i samband med att m ska lösas ut på nedersta raden i lösningen, $m = -8a + 42$. När det gäller kommunikation anses lösningen lätt att följa och förstå bland annat eftersom variabler och konstanter åtskiljs med olika beteckningar (x och a). Sammantaget ges två problemlösningspoäng på A-nivå och en kommunikationspoäng på A-nivå.

Elevlösning 17.2 (3 A_{PL} och 1 A_K)



$f(x) = 2x^2$

$f'(x) = 4x$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x^2 - (-42)}{x - (-2)}$

$\frac{2x^2 + 42}{x + 2} = 4x$

Det vet jag för derivatan lutningen är lika med $4x$

$2x^2 + 42 = 4x(x + 2)$

$2x^2 + 42 = 4x^2 + 8x$

$2x^2 + 8x - 42 = 0$

$x^2 + 4x - 21 = 0$

$x = -2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 21}$

$x_1 = -2 + 5 = 3$

$x_2 = -2 - 5 = -7$

Väljer den pos tangenten

$(-2, -42)$ $k = 12$

$-2 \cdot 12 + m = -42$

$m = -42 + 24 = -18$

SVAR: $y = 12x - 18$

Kommentar: Uppgiften är behandlad i sin helhet och är korrekt. När det gäller kommunikation anses lösningen lätt att följa och förstå trots att både variabler och konstanter betecknas med *x*. Sammantaget ges tre problemlösningspoäng på A-nivå samt nätt och jämnt en kommunikationspoäng på A-nivå.

Uppgift 20a

Elevlösning 20a.1 (1 E_R)

a) Ja, Sabina har rätt då konstanten A bara påverkar var minimipunkten har sin y-koordinat

Kommentar: Elevlösningen visar ett enkelt godtagbart resonemang där det framgår att värdet på konstanten A endast påverkar minimipunktens läge i y-led. Resonemanget hade varit tydligare om det framgått att *hela grafen* förskjuts i y-led. Elevlösningen ges nätt och jämnt resonemangspoängen på E-nivå.

Elevlösning 20a.2 (1 E_R)

a) Ja hon har rätt. Extrempunkternas x-koordinater fås när $f'(x)=0$
Eftersom A är en konstant deriveras inte den, så $f'(x)$ är alltid $8x-4x^2$ oavsett A:s värde

Kommentar: Elevlösningen visar ett enkelt godtagbart resonemang. Frasen ”deriveras inte den” är felaktig men kompenseras av resonemanget på sista raden. Elevlösningen ges resonemangspoängen på E-nivå.

Uppgift 20b

Elevlösning 20b.1 (0 poäng)

$f(x) = 4x^2 - x^4$

Påstående $f''(x)$ är mindre än 10 för alla x

$f'(x) = 8x - 4x^3$

$f''(x) = 8 - 12x^2$

Ja, i och med $-12x^2$ går det inte att få det storre än 10.

Kommentar: Elevlösningen bedöms inte ha en sådan kvalitet att den motsvarar en resonemangspoäng på C-nivå eftersom det inte förklaras på vilket sätt termen $-12x^2$ påverkar andraderivatans värde. Elevlösningen ges noll poäng.

Elevlösning 20b.2 (0 poäng)

Sabina har rätt då det högsta värdet är 8.

$f(x) = 4x^2 - x^4 \Rightarrow f'(x) = 8x - 4x^3 \Rightarrow f''(x) = 8 - 12x^2$

Kommentar: Elevlösningen bedöms inte ha en sådan kvalitet att den motsvarar en resonemangspoäng på C-nivå eftersom det utan motivering påstås att största värdet är 8. Elevlösningen ges noll poäng.

Elevlösning 20b.3 (1 C_R)

$f'(x) = 8x - 4x^3$ $\quad f''(x) = 8 - 12x^2$

Det stämmer. Eftersom $12x^2$ alltid blir positivt så blir $f''(x)$ mindre än 8.

Kommentar: Elevlösningen visar ett välgrundat resonemang trots att fallet då $12x^2 = 0$ utelämnas. Lösningen ges nätt och jämnt resonemangspoängen på C-nivå.

Uppgift 21

Elevlösning 21.1 (2 E_M, 2 C_B, 2 C_M och 1 C_K)

a) $f(t) = 1250e^{0,012t}$

$2000 = 1250e^{0,012t}$

$\ln\frac{2000}{1250} = \ln e^{0,012t}$

$0,012t = \ln\frac{2000}{1250}$

$t = \frac{\ln\frac{2000}{1250}}{0,012} \approx 39$ SVAR: 2049

b) $f'(t) = 1250 \cdot 0,012e^{0,012t}$

$f'(2030) = f'(20) = 1250 \cdot 0,012e^{0,012 \cdot 20} = 19$

SVAR: 19 st/år

c) $y = 1250 + 16t - 1250e^{0,012t}$

$y' = 16 - 1250 \cdot 0,012e^{0,012t}$

$16 = 1250 \cdot 0,012e^{0,012t}$

$\frac{16}{1250 \cdot 0,012} = e^{0,012t}$

$\ln\frac{16}{1250 \cdot 0,012} = \ln e^{0,012t}$

$t = \frac{\ln\frac{16}{1250 \cdot 0,012}}{0,012} = 5,37$

$t = 5,37$ år $\rightarrow$ 2,72

$t = 0$ år $\rightarrow$ 0

$t = 15$ år $\rightarrow$ $-6,52$ SVAR: $t = 15$

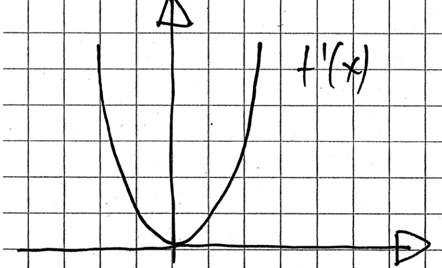
Kommentar: Uppgiften är behandlad i sin helhet och lösningen korrekt. När det gäller kommunikation är lösningen strukturerad och möjligt att följa och förstå. I b)-uppgiften är skrivsättet $f'(2030)$ felaktigt. I c)-uppgiften saknas $y' = 0$ i redovisningen och det framgår inte att det är funktionsvärden som beräknas i slutet av lösningen. Trots dessa brister bedöms elevlösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för kommunikationspoängen på C-nivå.

Uppgift 22

Elevlösning 22.1 (1 C_R)

$f(x) = x^3 + 0{,}03x + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 0{,}03$



från grafräknaren

Derivatans graf är alltid positiv utom då $x = 0$ för då är derivatan 0. Teckenväxling + 0 + alltså är det en terasspunkt Peder har rätt!

Kommentar: I lösningen studeras derivatans graf på grafräknaren. Undersökningsmetoden kan leda till välgrundade slutsatser, men eftersom fönsterinställningen är för grov framgår inte att derivatan saknar nollställe och en felaktig slutsats dras. Sammantaget ges lösningen den första resonemangspoängen på C-nivå.

Elevlösning 22.2 (1 C_R)

$f(x) = x^3 + 0{,}03x + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 0{,}03$

$3x^2 + 0{,}03 = 0$

$x^2 + 0{,}01 = 0$

$x^2 = -0{,}01$

$x = \pm\sqrt{-0{,}01}$ ERROR

$x = 0{,}1$?

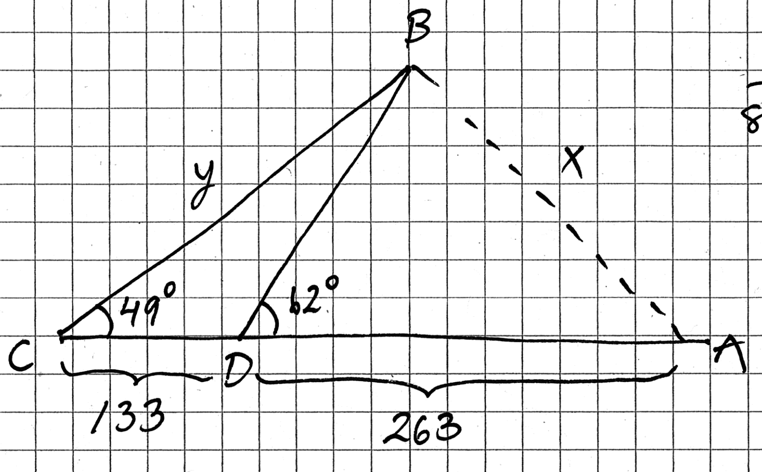
x	0	0,1	0,2
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	TERRASS	↗

HAN HAR RÄTT!

Kommentar: Undersökningsmetoden (söka derivatans nollställe) är godtagbar eftersom den kan leda till välgrundade slutsatser, men eftersom beräkningen av derivatans nollställe inte är korrekt dras en felaktig slutsats. Sammantaget ges lösningen den första resonemangspoängen på C-nivå.

Uppgift 23

Elevlösning 23.1 (2 C_{PL})



$$\frac{y}{\sin 118^\circ} = \frac{133}{\sin 13^\circ}$$

$$y = 522{,}03$$

$$CA = z = 396$$

$$x^2 = z^2 + y^2 - 2zy\cos 49^\circ$$

$$x^2 = 158085{,}1849$$

$$x = 397{,}599$$

Svar: sträckan AB är 398m

Kommentar: Elevlösningen är korrekt och behandlar uppgiften i sin helhet. När det gäller kommunikation anges inte vilka satser som används. Vidare framgår inte var vinklarna 118° och 13° är belägna och inte heller hur de beräknats. Ett mellanled i slutet av lösningen saknas. Lösningen bedöms inte uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå. Sammantaget ges lösningen två problemlösningspoäng på C-nivå.

Elevlösning 23.2 (2 C_{PL} och 1 C_K)

Vinkel D:s yttervinkel $180° - 62° = 118°$

Vinkel DBC $= 180° - 49° - 118° = 13°$

Sinussatsen ger $\frac{133}{\sin 13} = \frac{BD}{\sin 49}$

$BD = \frac{133 \cdot \sin 49}{\sin 13}$

$BD = 446.214$ m

cosinussatsen ger

$AB^2 = 263^2 + 446{,}2^2 - 2 \cdot 263 \cdot 446{,}2 \cdot \cos 62$

$AB^2 = 158090{,}65$

$AB = 397{,}6$ m

Svar (397,6 m)
398 m

Kommentar: Elevlösningen är korrekt och behandlar uppgiften i sin helhet. När det gäller kommunikation saknas en figur och gradtecken på några ställen, men lösningen är i alla andra avseenden så tydligt redovisad att den är möjlig att följa och förstå. Sammantaget ges lösningen två problemlösningspoäng och en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 24

Elevlösning 24.1 (0 poäng)

Den är negativ för den har en maximipunkt.
Första derivatan är ju = 0, och eftersom kurvan
börjar luta nedåt efter extrempunkten
så blir andraderivatan negativ

Kommentar: Elevlösningen visar ett resonemang där det inte framgår varför derivatan är avtagande kring punkten där $x = a$. Elevlösningen ges noll poäng.

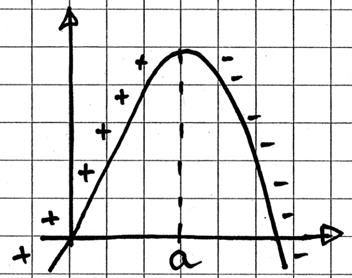
Elevlösning 24.2 (1 A_R)

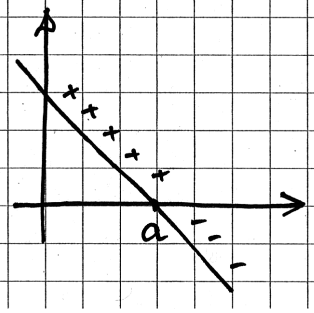
Derivatan bestämmer lutningen i en punkt.
Lutningen i en vändpunkt är noll, vilket gör
att derivatans graf visar denna punkt på x-axeln
och fortsätter sedan nedåt eftersom följande
punkter har negativ lutning.
Andraderivatan visar lutningen i derivatans graf
och eftersom punkten a har negativ lutning i
derivatans graf är punkten även negativ i
andraderivatan.

Kommentar: Resonemanget omfattar endast intervallet $x \geq a$ och anses därmed endast uppfylla kraven för en godtagbar ansats. Elevlösningen ges en resonemangspoäng på A-nivå.

Elevlösning 24.3 (2 A_R)

Svar: Eftersom funktionen har en maximi så börjar derivatan positiv för att bli negativ





Derivatan $k<0$ alltså andraderivatan negativ

Kommentar: Lösningen visar en godtagbar ansats där det framgår varför derivatan är avtagande kring punkten där $x = a$. Däremot saknar figurerna förklarande text om varför en avtagande derivata innebär en negativ andraderivata. Elevlösningen anses trots denna brist nätt och jämnt uppfylla kraven för två resonemangspoäng på A-nivå.

Uppgift 26

Elevlösning 26.1 (2 A_M)

$V = V_{yttre} - V_{inre}$

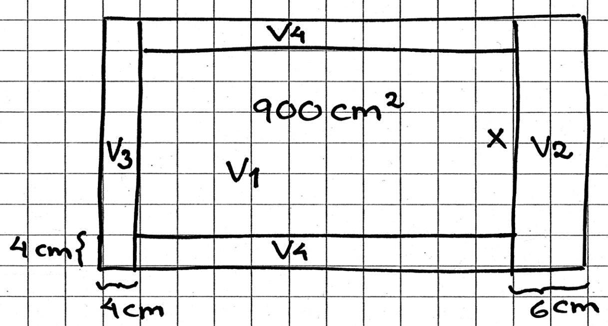
$V = 12\left(\frac{900}{x} + 10\right)(x+8) - 900 \cdot 8$

Grafräknaren ger då $x = 27$, $V = 11000$

Svar $11000\ cm^3$

Kommentar: Elevlösningen leder fram till rätt svar men är knapphändig. När det gäller kommunikation saknas redovisning av hur volymfunktionen bestämts och hur det digitala verktyget använts. Det är därför oklart om grafräknarfunktionen inkluderar bestämning av minimum eller inte. Sammantaget bedöms elevlösningen uppfylla kraven för de två första modelleringspoängen på A-nivå.

Elevlösning 26.2 (2 A_M och 1 A_K)



5 olika delar

$y = \frac{900}{x}$

V_1 = Undre plattans volym

$= 4(x+8)\cdot(4+\frac{900}{x}+6) = (4x+32)(10+\frac{900}{x})$

$= 40x+3600+320+\frac{28800}{x} = 40x+3920+\frac{28800}{x}$

V_2 = Tjocka sidans volym

$(x+8)\cdot 6\cdot 8 = (6x+48)\cdot 8 = 48x+384$

V_3 = Smala kortsidans volym

$4\cdot 8\cdot x = 32x$

V_4 = Båda långsidornas volym

$= 2\cdot\frac{900}{x}\cdot 8\cdot 4 = \frac{2\cdot 28800}{x}$

$V_{tot} = V_1+V_2+V_3+V_4 =$

$40x+3920+\frac{28800}{x}+384+48x+32x+\frac{2\cdot 28800}{x} =$

$120x+86400\cdot x^{-1}+4304$

$V_{tot}'(x) = 120-\frac{86400}{x^2}$

$120-\frac{86400}{x^2} = 0$

$x^2 = 720$, $x = \sqrt{720} \approx 26.83$

$V_{tot}''(x) = -86400\cdot(-2)\,x^{-3}$

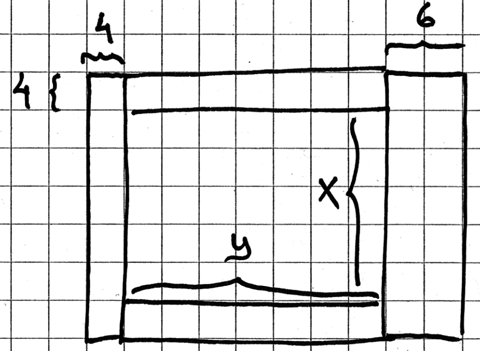
$V_{tot}''(26{,}83) = 86400\cdot 2\cdot(26{,}83)^{-3} > 0$ Minpunkt!

$\Rightarrow V_{tot} = 120\cdot 26{,}83+86400\cdot 26{,}83^{-1}+4304 = 10744\ cm^3$

Svar $10{,}7\ dm^3$

Kommentar: Uppgiften är löst i sin helhet där en i huvudsak korrekt volymfunktion (V_{tot}) är tecknad förutom att delvolymen V_3 är felaktig. Därmed ges den första modelleringspoängen men inte den andra. Eftersom lösningen fortsättningsvis är korrekt och det tidigare felet inte förenklar lösningen ges den tredje modelleringspoängen (följdfel, se sid. 3). När det gäller kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå då den innehåller en tydlig figur, indexering och förklarande hjälptext. En algebraisk verifiering av minimum avslutar lösningen. Sammantaget bedöms elevlösningen uppfylla kraven för den första och den tredje modelleringspoängen på A-nivå och kommunikationspoängen på A-nivå.

Elevlösning 26.3 (3 A_M och 1 A_K)



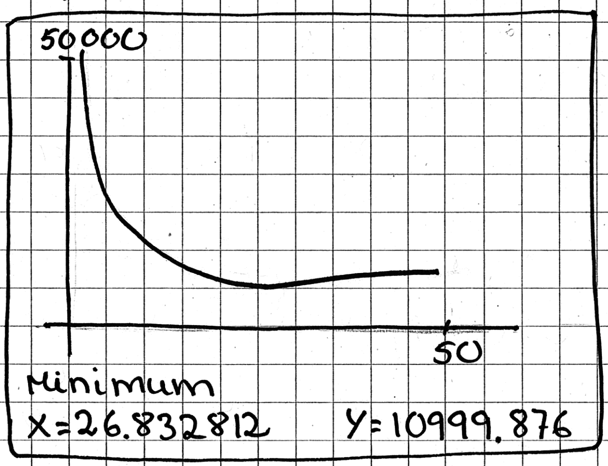
Volymen fås av yttre volymen minus inre volymen

$V = (x+8)(y+10)\cdot 12 - 8xy$ och $x \cdot y = 900$

$V = (x+8)\left(\frac{900}{x}+10\right)\cdot 12 - 8x\cdot\frac{900}{x}$

$V = (x+8)\left(\frac{900}{x}+10\right)\cdot 12 - 7200$

Ritar upp grafen på räknaren och bestämmer minpunkten



Minsta volymen är 11 dm^3

Kommentar: Uppgiften är löst i sin helhet och korrekt. När det gäller kommunikation redovisas tydligt hur funktionsuttrycket framtagits och det framgår även hur det digitala verktyget använts och att minimum är verifierat. Sammantaget bedöms elevlösningen uppfylla kraven för tre modelleringspoäng och en kommunikationspoäng på A-nivå.

Ur ämnesplanen för matematik

Matematiken har en flertusenårig historia med bidrag från många kulturer. Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska matematiken som sådan. Kommunikation med hjälp av matematikens språk är likartad över hela världen. I takt med att informationstekniken utvecklas används matematiken i alltmer komplexa situationer. Matematik är även ett verktyg inom vetenskap och för olika yrken. Ytterst handlar matematiken om att upptäcka mönster och formulera generella samband.

Ämnets syfte

Undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar förmåga att arbeta matematiskt. Det innefattar att utveckla förståelse av matematikens begrepp och metoder samt att utveckla olika strategier för att kunna lösa matematiska problem och använda matematik i samhälls- och yrkesrelaterade situationer. I undervisningen ska eleverna ges möjlighet att utmana, fördjupa och bredda sin kreativitet och sitt matematikkunnande. Vidare ska den bidra till att eleverna utvecklar förmåga att sätta in matematiken i olika sammanhang och se dess betydelse för individ och samhälle.

Undervisningen ska innehålla varierade arbetsformer och arbetssätt, där undersökande aktiviteter utgör en del. När så är lämpligt ska undervisningen ske i relevant praxisnära miljö. Undervisningen ska ge eleverna möjlighet att kommunicera med olika uttrycksformer. Vidare ska den ge eleverna utmaningar samt erfarenhet av matematikens logik, generaliserbarhet, kreativa kvaliteter och mångfacetterade karaktär. Undervisningen ska stärka elevernas tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang samt ge utrymme åt problemlösning som både mål och medel. I undervisningen ska eleverna dessutom ges möjlighet att utveckla sin förmåga att använda digital teknik, digitala medier och även andra verktyg som kan förekomma inom karaktärsämnena.

Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att:

1. använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.
2. hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.
3. formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat.
4. tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.
5. följa, föra och bedöma matematiska resonemang.
6. kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.
7. relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.

Kunskapskrav Matematik kurs 3b och 3c

Betyget E Eleven kan **översiktligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **översiktligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena **i bekanta situationer**. I arbetet hanterar eleven **några enkla** procedurer och löser uppgifter av standardkaraktär **med viss säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av enkel karaktär**. Dessa problem inkluderar **ett fåtal** begrepp och kräver **enkla** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att tillämpa **givna** matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier och metoder.

Eleven kan föra **enkla** matematiska resonemang och värdera med **enkla** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **med inslag av** matematiska symboler och andra representationer.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **kursens innehåll** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **enkla** resonemang om exemplens relevans.

Betyget D Betyget D innebär att kunskapskraven för E och till övervägande del för C är uppfyllda.

Betyget C Eleven kan **utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade aritmetiska och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja och** tillämpa matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade** matematiska resonemang och värdera med **nyanserade** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra enkla matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med viss anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade** resonemang om exemplens relevans.

Betyget B Betyget B innebär att kunskapskraven för C och till övervägande del för A är uppfyllda.

Betyget A Eleven kan **definiera och utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **flera** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa **komplexa** matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade aritmetiska och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet och på ett effektivt sätt**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av komplex karaktär**. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. **I problemlösning upptäcker eleven generella samband som presenteras med symbolisk algebra**. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja**, tillämpa **och anpassa** matematiska modeller. Eleven kan med **nyanserade** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade och nyanserade** matematiska resonemang, värdera med **nyanserade** omdömen **och vidareutveckla** egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med god anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade och nyanserade** resonemang om exemplens relevans.

Centralt innehåll Matematik kurs 3c

Undervisningen i kursen ska behandla följande centrala innehåll:

Aritmetik, algebra och geometri

A1 Begreppen polynom och rationella uttryck samt generalisering av aritmetikens lagar för hantering av dessa begrepp.
A3 Begreppet absolutbelopp.
A4 Egenskaper hos cirkelns ekvation och enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp.
A5 Bevis och användning av cosinus-, sinus- och areasatsen för en godtycklig triangel.

Samband och förändring

F7 Orientering kring kontinuerlig och diskret funktion samt begreppet gränsvärde.
F8 Egenskaper hos polynomfunktioner av högre grad.
F9 Begreppen sekant, tangent, ändringskvot och derivata för en funktion.
F10 Härledning och användning av deriveringsregler för potens- och exponentialfunktioner samt summor av funktioner.
F11 Introduktion av talet e och dess egenskaper.
F12 Algebraiska och grafiska metoder för bestämning av derivatans värde för en funktion.
F13 Algebraiska och grafiska metoder för lösning av extremvärdesproblem inklusive teckenstudium och andraderivatan.
F14 Samband mellan en funktions graf och funktionens första- och andraderivata.
F15 Begreppen primitiv funktion och bestämd integral samt sambandet mellan integral och derivata.
F16 Bestämning av enkla integraler i tillämpningar som är relevanta för karaktärsämnena.

Problemlösning

P1 Strategier för matematisk problemlösning inklusive användning av digitala medier och verktyg.
P3 Matematiska problem av betydelse för samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen.
P4 Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.