

<b>Part B</b>	Problems 1–11 which only require answers.
<b>Part C</b>	Problems 12–17 which require complete solutions.
<b>Test time</b>	120 minutes for Part B and Part C together.
<b>Resources</b>	Formula sheet and ruler.

The test consists of an oral part (Part A) and three written parts (Part B, Part C and Part D). Together they give a total of 67 points consisting of 24 E-, 24 C- and 19 A-points.

Level requirements for test grades

E: 17 points

D: 26 points of which 8 points on at least C-level

C: 34 points of which 14 points on at least C-level

B: 44 points of which 6 points on A-level

A: 53 points of which 11 points on A-level

The number of points you can get for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge levels (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled “*Only answer is required*” you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures.

**Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.**

Name: _____
Date of birth: _____
Educational programme: _____

**Part B:** Digital resources are not allowed. *Only answer is required.* Write your answers in the test booklet.

1. Find *all* antiderivatives of  $f(x) = x^2 + 8$

$F(x) =$  \_\_\_\_\_ (1/0/0)

2. Ayse throws a ball straight up into the air. The height of the ball is given by  $s(t) = 1.5 + 12t - 5t^2$  where  $s(t)$  is the height above the ground in metres and  $t$  is the time in seconds after the throw.



Determine the velocity of the ball at the time  $t = 1$  second.

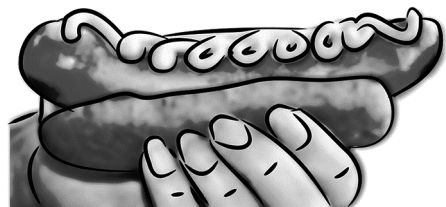
\_\_\_\_\_ m/s (1/0/0)

3. Mattias sells hot dogs at a football game. The hot dogs cost SEK 20 each. Mattias' revenue in SEK is a function of the number of hot dogs sold.

Which of the alternatives A–E is correct?

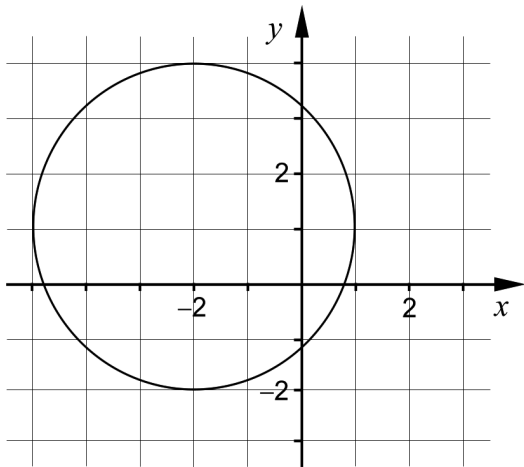
The function is ...

- A. a quadratic function.
- B. a discrete function.
- C. an exponential function.
- D. a constant function.
- E. a continuous function.



\_\_\_\_\_ (1/0/0)

4. One of the alternatives A–H shows the equation of the circle in the figure. Which one? \_\_\_\_\_ (1/0/0)



- |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|
| A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$ | E. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 3$ |
| B. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ | F. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 3$ |
| C. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$ | G. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 3$ |
| D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ | H. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3$ |

5. Determine  $f'(x)$ .

a)  $f(x) = 5x^5 + x^2 - 2$   $f'(x) =$  \_\_\_\_\_ (1/0/0)

b)  $f(x) = \frac{e^{4x} - e}{3}$   $f'(x) =$  \_\_\_\_\_ (0/1/0)

c)  $f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}}$   $f'(x) =$  \_\_\_\_\_ (0/1/0)

6. In the expression  $\frac{x-A}{2B-x^2}$ ,  $A$  and  $B$  are constants.

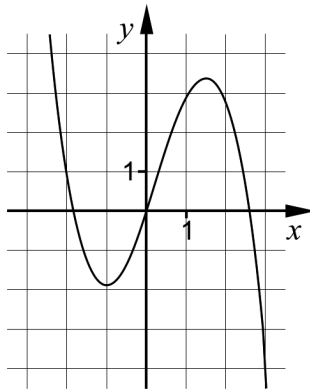
Determine  $A$  and  $B$  so that the following two conditions are satisfied:

- The expression has the value 0 when  $x = -5$
- The expression is not defined for  $x = 10$  and  $x = -10$

$A =$  \_\_\_\_\_ (0/1/0)

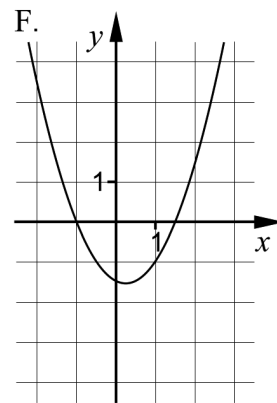
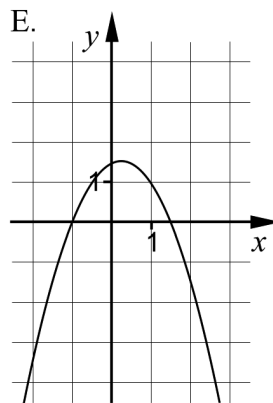
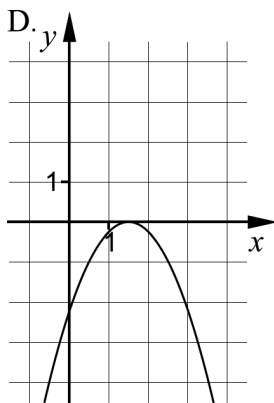
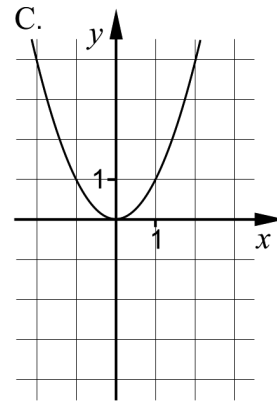
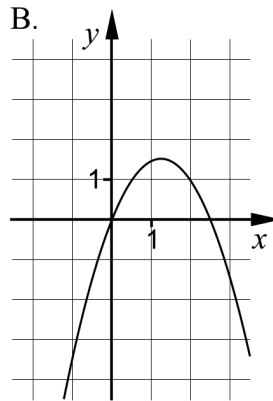
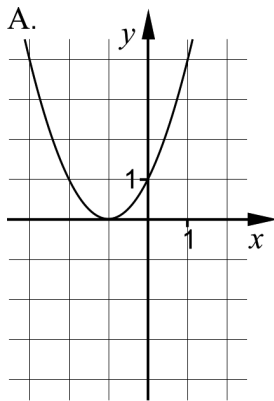
$B =$  \_\_\_\_\_ (0/1/0)

7. The figure shows the graph of the function  $f$ .



One of the alternatives A–F shows the graph of the function's derivative  $f'$ . Which one?

\_\_\_\_\_ (0/1/0)



8. Simplify the expressions as far as possible.

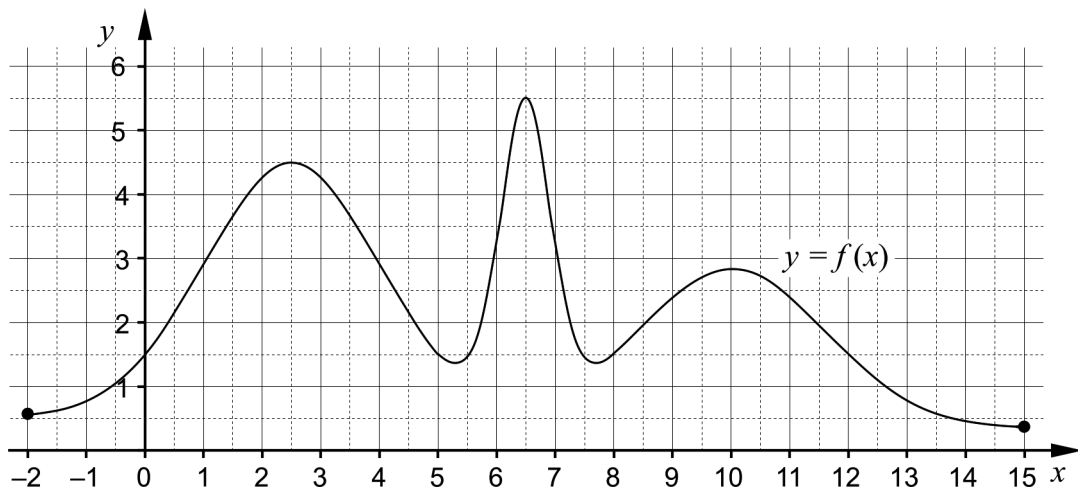
a)  $\frac{2x-10}{2x^2-20x+50}$  \_\_\_\_\_ (0/1/0)

b)  $-x^4 - (-2x)^4$  \_\_\_\_\_ (0/1/0)

c)  $\frac{-A+(A+5)^{10}-5}{A+5}$  \_\_\_\_\_ (0/0/1)

9. Determine the exact value of  $\sin 300^\circ$  \_\_\_\_\_ (0/1/0)

10. The figure shows the graph of the function  $f$  on the interval  $-2 \leq x \leq 15$



For what value of  $p$  does  $\int_p^{p+2} f(x) dx$  assume its largest value?

\_\_\_\_\_ (0/0/1)

11. The function  $g$  is a cubic function. The table shows the sign of the derivative for some different values of  $x$ .

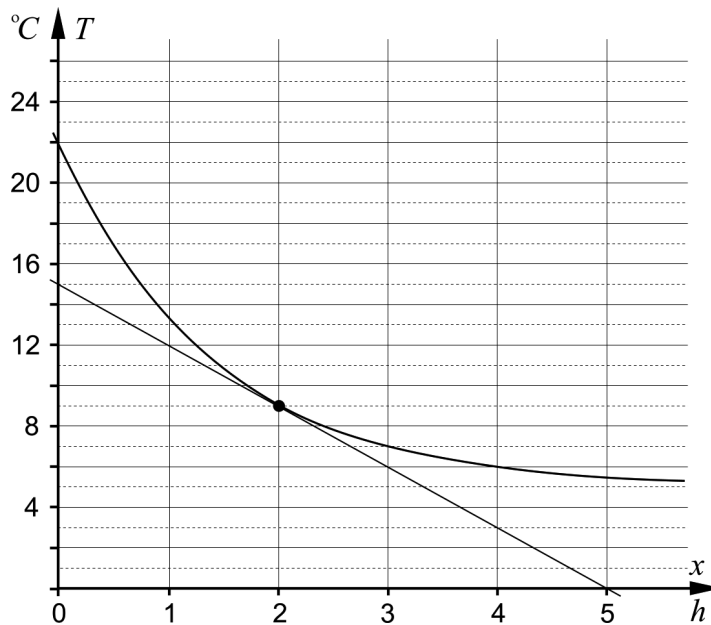
$x$	0	3	5	6	10
$g'(x)$	-	0	+	0	-

For what value of  $x$  does it hold that  $g''(x) = 0$ ? \_\_\_\_\_ (0/0/1)

**Part C:** Digital resources are not allowed. Write down your solutions on separate sheets of paper.

12. Evaluate  $\int_1^2 6x^2 dx$  algebraically. (2/0/0)

13. A bottle of water is placed in a fridge at 12:00. The temperature of the water is described by the exponential function  $T(x) = 17e^{-0.7x} + 5$  where  $T(x)$  is the temperature of the water in  $^{\circ}\text{C}$  and  $x$  is the time in hours after 12:00. The figure shows the graph of the function  $T$  and the tangent at the point where  $x = 2$



- a) Read from the figure and calculate the average temperature change of the water per hour during the first 4 hours. (2/0/0)
- b) Use the figure to calculate the gradient of the tangent. Interpret the meaning of this gradient in this context. (0/2/0)
- c) Is it possible for the temperature of the water to reach  $3^{\circ}\text{C}$ ?  
Start with the exponential function  $T(x) = 17e^{-0.7x} + 5$  and justify your answer. (1/1/0)

14. It holds for the function  $f$  that  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$   
 Use the derivative to determine the coordinates for any existing maximum, minimum and saddle points for the graph of the function.

Also, determine the character of each point, that is, whether it is a maximum, minimum or saddle point. (3/1/0)

15. Calculate the value of the expression  $\sqrt{4x^2} - |2x|$  for two positive and two negative values of  $x$ . Then formulate a hypothesis for the expression  $\sqrt{4x^2} - |2x|$  based on your chosen values of  $x$ . (2/0/0)

16. It holds for a function  $f$  that  $f(x) = kx + m$   
 Investigate what must be true for  $k$  and  $m$  if  $\int_{-2}^2 f(x) dx = 4$   
 Justify your conclusions. (0/2/1)

17. Fish of a species that has not existed there before are planted into a lake. The population of fish can be described by the relation  $N(t) = \frac{15000}{3 + 2e^{-0.5t}}$  where  $N$  is the number of fish and  $t$  is the time in years after the fish have been planted.



- a) Determine how many fish were initially planted into the lake. (0/1/0)
- b) Due to different environmental factors, the number of fish cannot keep growing indefinitely. Use the relation and determine the upper limit for the number of fish. (0/0/2)

<b>Part D</b>	Problems 18–25 which require complete solutions.
<b>Test time</b>	120 minutes.
<b>Resources</b>	Digital resources, formula sheet and ruler.

The test consists of an oral part (Part A) and three written parts (Part B, Part C and Part D). Together they give a total of 67 consisting of 24 E-, 24 C- and 19 A-points.

Level requirements for test grades

E: 17 points

D: 26 points of which 8 points on at least C-level

C: 34 points of which 14 points on at least C-level

B: 44 points of which 6 points on A-level

A: 53 points of which 11 points on A-level

The number of points you can get for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge levels (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled “*Only answer is required*” you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures and show how you use your digital resources.

**Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.**

Name: \_\_\_\_\_

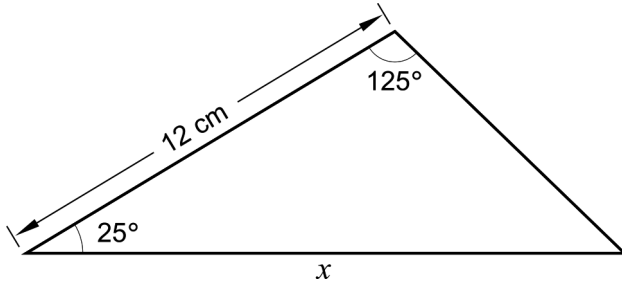
Date of birth: \_\_\_\_\_

Educational programme: \_\_\_\_\_

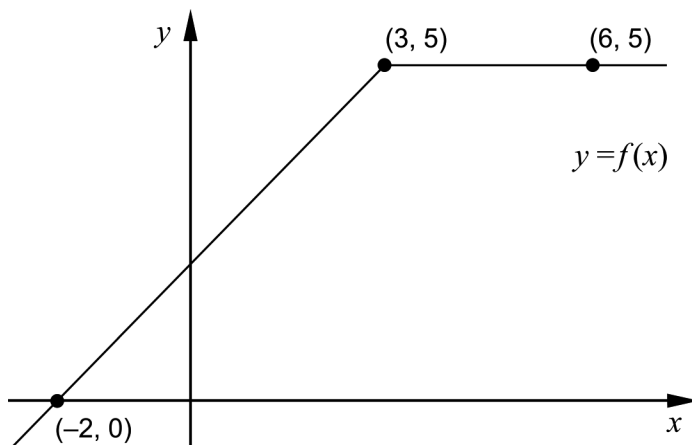


**Part D:** Digital resources are allowed. Write down your solutions on separate sheets of paper.

18. Calculate the length of side  $x$  in the triangle. (2/0/0)



19. The figure shows the graph of a function  $f$ . The graph passes through the three marked points.

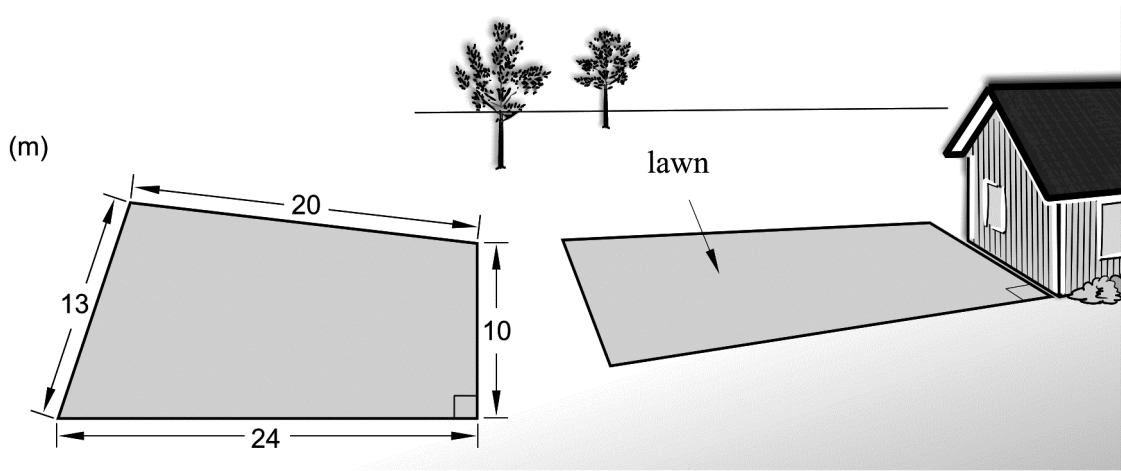


Evaluate  $\int_{-2}^6 f(x) dx$ . (2/0/0)

20. The price of a certain UHD TV today is SEK 33 700 but the price rapidly decreases. The value of the TV can be described by the model
- $$V(t) = 33\,700 e^{-0.034t}$$
- where  $V(t)$  is the value of the TV in SEK and  $t$  is the time in months after the purchase.

- a) Determine after how many months the value of the TV is SEK 20 000 (2/0/0)
- b) Determine at what time the decrease in value (in SEK/month) is half the size of the decrease in value at the purchase. (0/2/0)

21. Ken is going to lay out a lawn in his garden. He measures the sides to 13 m, 20 m, 10 m and 24 m. See figure. One of the angles of the lawn is  $90^\circ$ .



Ken has grass seeds for  $250 \text{ m}^2$ . Decide whether the grass seeds will suffice for the whole lawn.

(0/4/0)

22. Albin's weight can be described by the function

$$V(t) = 0.10t^3 - 1.23t^2 + 6.51t + 3.72$$

where the weight  $V$  kg is a function of the time  $t$  years after his birth. The function is valid for the first six years of his life.



The velocity at which Albin's weight increases varies. Determine what values the velocity can assume during Albin's first six years in life.

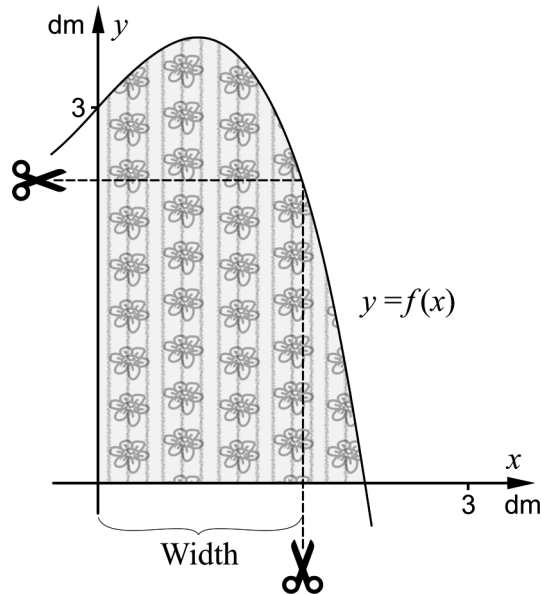
(0/0/2)

23. It holds for the polynomial function  $f$  that  $f'(x) > 0$  for all  $x$ .

Determine the number of real solutions to the equation  $f(x) = 0$

(0/0/2)

24. Sam and Sofia have been given spare pieces of fabric from a furniture factory. The pieces have a rounded side that can be described by the curve  $y = -0.5x^3 + x + 3$



They have planned to cut both rectangular and quadratic napkins and want each piece of fabric to suffice for one napkin. They have planned to use the straight edges as sides of the napkins. See figure.

Sam and Sofia want the napkins to have as large area as possible.

- Determine the width of the *rectangular* napkins so that the area is as large as possible. Answer in dm accurate to two decimal places. (0/2/0)
  - Determine the side of the *quadratic* napkins so that the area is as large as possible. Answer in dm accurate to two decimal places. (0/0/3)
25. It holds for the function  $f$  that  $f(x) = x^3 + kx^2 + 2.9kx$   
 where the constant  $k > 0$   
 The graph of the function has a saddle point for a certain value of  $k$ .  
 Determine this value of  $k$ . (0/0/3)

## To the student – information about the oral part

You will be given a problem that you will solve in writing, and then you will present your solution orally. If you need, you can ask your classmates or your teacher and use your textbook for help when solving the problem. Your oral presentation starts with you presenting the problem and then you describe and explain your solution. You must present all steps in your solution. However, if you have done the same calculation several times (for example in a table) it might be sufficient if you present only a few of the calculations. Your presentation should take a maximum of 5 minutes, and be held to a smaller group of your classmates and one or more teachers.

The problem given to you should, on the whole, be solved algebraically. You might need a calculator to do some of the calculations but, when presenting your solution, you should avoid referring to the use of your calculator for drawing graphs and/or symbolic handling (if that is the type of calculator you are using).

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution, and
- how well you use mathematical terminology.

*How complete, relevant and structured your presentation is*

Your presentation must contain the necessary parts in order for a listener to follow and understand your thoughts. What you say should be in a suitable order and be relevant. The listener must understand how calculations, descriptions, explanations and conclusions are connected with each other.

*How well you describe and explain the train of thought behind your solution*

Your presentation should contain both descriptions and explanations. To put it simple, a description answers the question “How?” and an explanation answers the question “Why?”. You describe something when you for instance tell how you have done a calculation. You explain something when you for instance justify why you could use a certain formula.

*How well you use mathematical terminology*

In your presentation you should use a language that contains mathematical terms, expressions and symbols suitable for the problem you have solved.

Mathematical terms are for example words like “exponent”, “function” and “graph”.

An example of a mathematical expression is that  $x^2$  is read “ $x$  to the power 2” or “ $x$  squared”. Some examples of mathematical symbols are  $\pi$  and  $f(x)$ , which are read “pi” and “ $f$  of  $x$ ”.

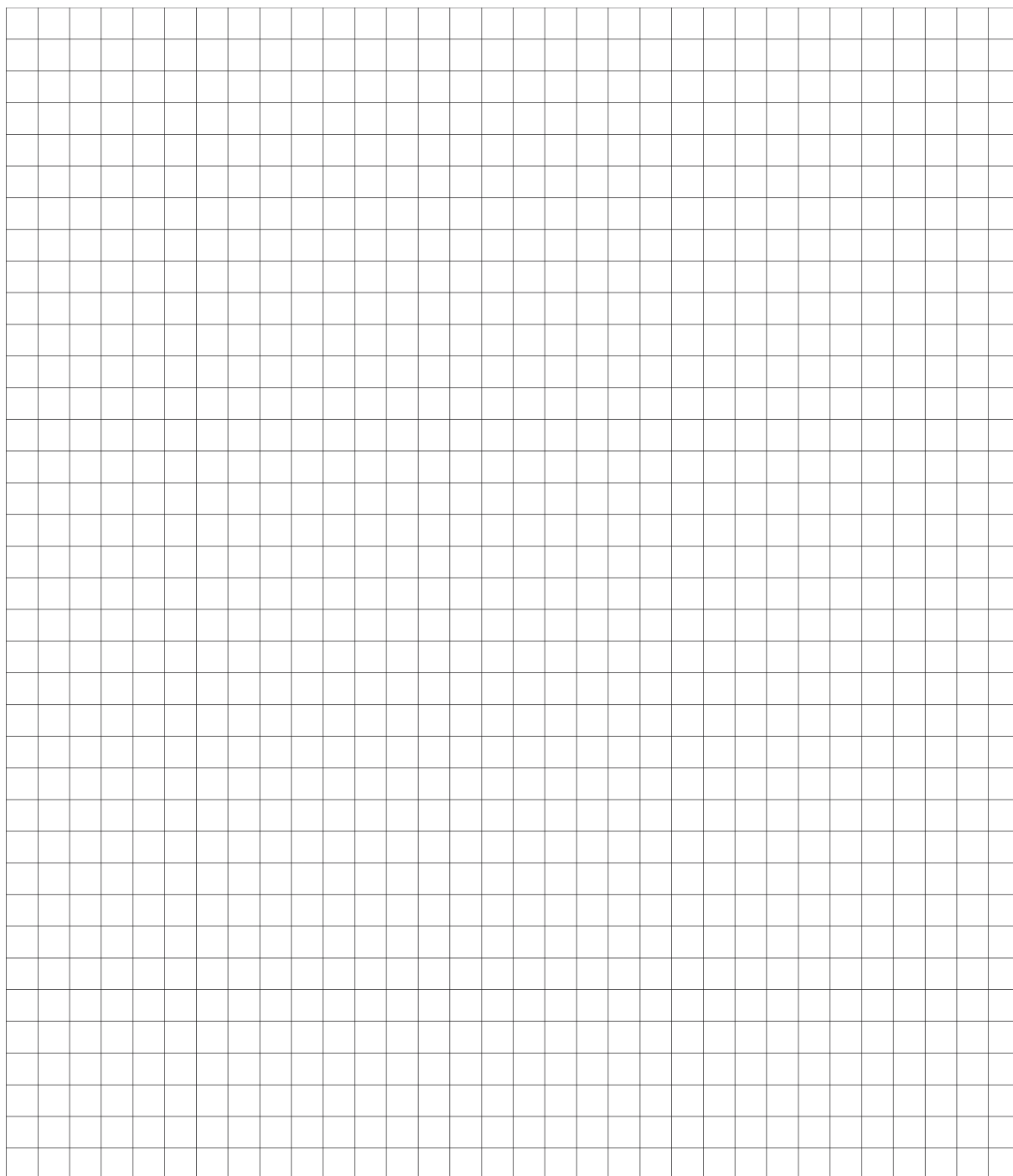
**Problem 1**

Name: \_\_\_\_\_

**When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration**

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution, and
- how well you use the mathematical terminology.

1. The graph of  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 10$  has three extreme points. Use the derivative to determine the coordinates and characters of these.



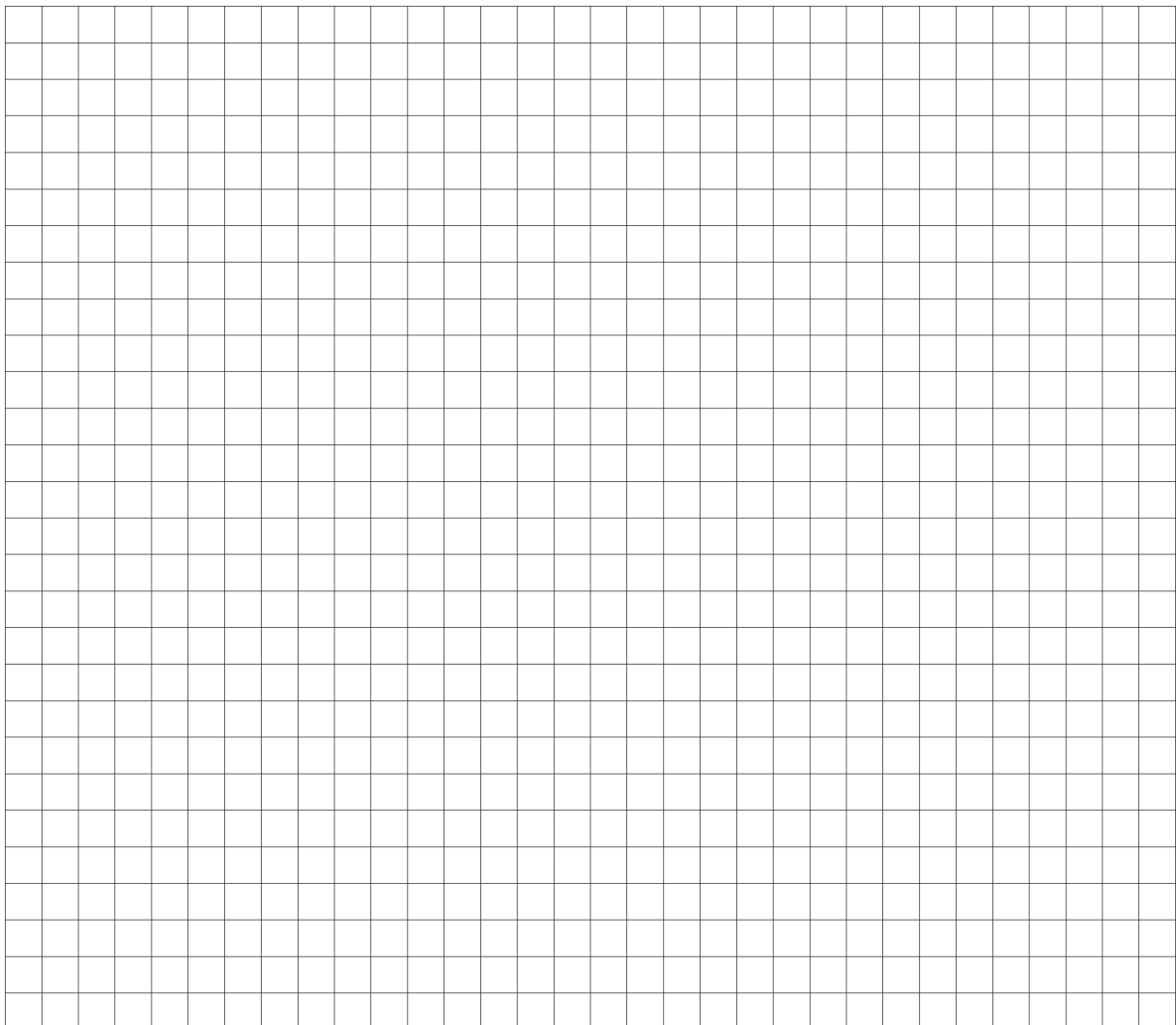
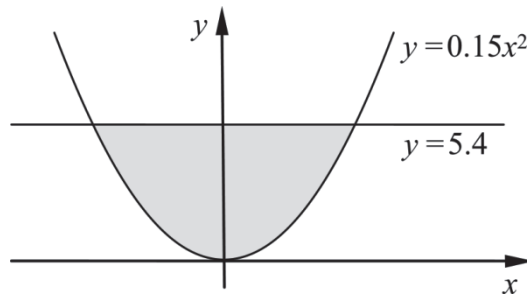
**Problem 2**

Name: \_\_\_\_\_

**When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration**

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution, and
- how well you use the mathematical terminology.

2. The curve  $y = 0.15x^2$  and the line  $y = 5.4$  enclose a region which is marked grey in the figure. Calculate the area of the region.



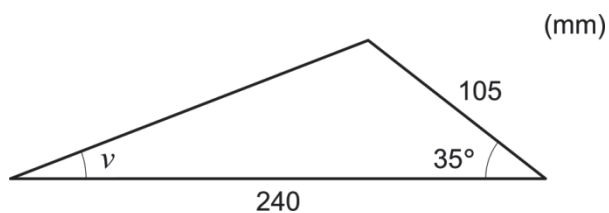
## Problem 3

Name: \_\_\_\_\_

**When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration**

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution, and
- how well you use the mathematical terminology.

3. The figure shows a triangle where two sides and one angle are known. Calculate the angle  $v$ .



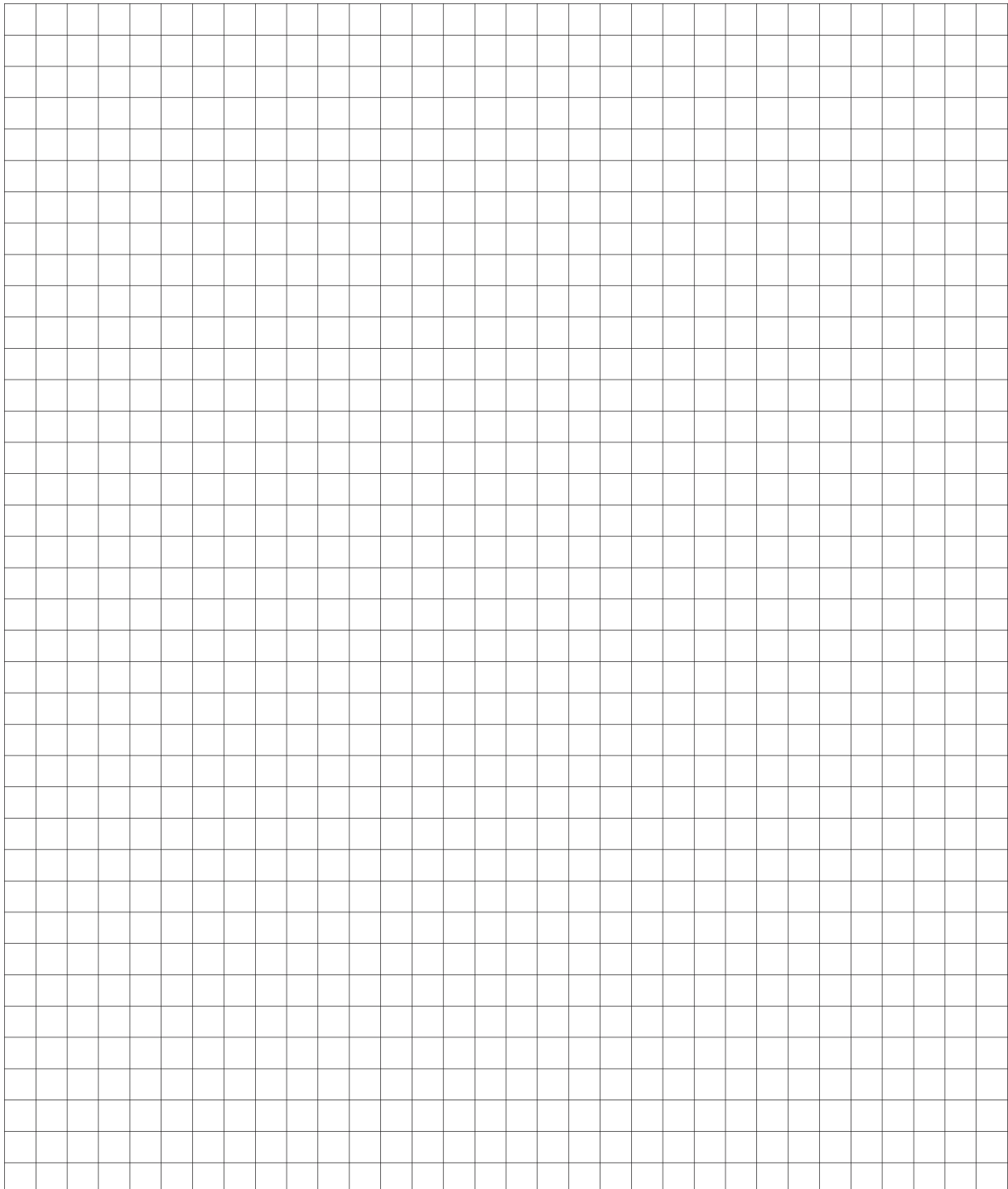
## Problem 4

Name: \_\_\_\_\_

**When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration**

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution, and
- how well you use the mathematical terminology.

4. It holds for the function  $f$  that  $f(x) = x^2 + x - 20$   
The curve has a tangent at the point where the curve intersects the positive  $x$ -axis.  
Calculate where this tangent intersects the  $y$ -axis.





## Bedömningsmatris för bedömning av muntlig kommunikativ förmåga

Kommunikativ förmåga	E	C	A	Max
<p><b>Fullständighet, relevans och struktur</b></p> <p>Hur fullständig, relevant och strukturerad elevens redovisning är.</p>	<p>Redovisningen kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande.</p> <p>Det finns en övergripande struktur men redovisningen kan bitvis vara fragmentarisk eller rörig.</p> <p>(1/0/0)</p>		<p>Redovisningen är fullständig och endast relevanta delar ingår.</p> <p>Redovisningen är välstrukturerad.</p> <p>(1/0/1)</p>	(1/0/1)
<p><b>Beskrivningar och förklaringar</b></p> <p>Förekomst av och utförlighet i beskrivningar och förklaringar.</p>	<p>Någon förklaring förekommer men tyngdpunkten i redovisningen ligger på beskrivningar.</p> <p>Utförligheten i de beskrivningar och de förklaringar som framförs kan vara begränsad.</p> <p>(1/0/0)</p>		<p>Redovisningen innehåller tillräckligt med utförliga beskrivningar och förklaringar.</p> <p>(1/0/1)</p>	(1/0/1)
<p><b>Matematisk terminologi</b></p> <p>Hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.</p>	<p>Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse vid enstaka tillfällen i redovisningen.</p> <p>(1/0/0)</p>	<p>Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom delar av redovisningen.</p> <p>(1/1/0)</p>	<p>Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom hela redovisningen.</p> <p>(1/1/1)</p>	(1/1/1)
<b>Summa</b>				(3/1/3)

# Innehållsförteckning

Inledning.....	3
1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 3c.....	4
Allmänna riktlinjer för bedömning.....	4
Bedömningsmodeller.....	4
Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga .....	5
2. Bedömningsanvisningar .....	7
Läsanvisning.....	7
Instruktioner för bedömning av delprov B .....	7
Instruktioner för bedömning av delprov C .....	9
Instruktioner för bedömning av delprov D .....	11
3. Exempel på bedömda elevlösningar.....	14
Uppgift 13b.....	14
Uppgift 13c.....	15
Uppgift 14.....	17
Uppgift 15.....	18
Uppgift 16.....	20
Uppgift 17b.....	21
Uppgift 20 .....	22
Uppgift 21.....	24
Uppgift 22.....	25
Uppgift 23.....	26
Uppgift 24.....	28
Uppgift 25.....	30
4. Instruktioner för sammanvägning till ett provbetyg.....	32
Sammanvägning till ett provbetyg i samband med provet i matematik 3c .....	32
Resultaten på provet i relation till kursbetyget .....	32
5. Kopieringsunderlag och webbmaterial.....	33
Övrigt webbmaterial.....	33
Sammanställning av elevresultat .....	34
Provsammanställning – Kunskapskrav .....	36
Provsammanställning – Centralt innehåll.....	37
Centralt innehåll Matematik 3c .....	38

## Inledning

Det här häftet ska användas vid bedömningen och betygssättningen av det nationella provet i matematik 3c. Häftet består av 5 kapitel. Inledningsvis finns information om bedömningen och betygssättningen av provet (kapitel 1). Sedan följer anvisningar för att bedöma samtliga skriftliga delprov (kapitel 2). Därefter finns ett kapitel med exempel på bedömda elevlösningar (kapitel 3) och ett kapitel med instruktioner för sammanvägningen till ett provbetyg (kapitel 4). Det avslutande kapitlet innehåller kopieringsunderlag samt hänvisningar till webbmaterial (kapitel 5).

# 1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 3c

## Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att  $E_{PL}$  och  $A_R$  ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

## Bedömningsmodeller

Bedömningsanvisningarna till långvarsuppgifterna är skrivna enligt tre olika modeller. Avvikelser från dessa kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.

Modell 1:

Godtagbar ansats, t.ex. ...	+1 $E_P$
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (...)	+1 $E_P$

*Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.*

Modell 2:

Godtagbar ansats, t.ex. ...	+1 E <sub>P</sub>
med korrekt bestämning av...	+1 E <sub>P</sub>
Godtagbar verifiering av...	+1 E <sub>P</sub>

*Kommentar: Uppgiften ger maximalt (3/0/0). I detta exempel är den tredje poängen oberoende av den andra poängen. Det indikeras med att den tredje raden inleds med stor bokstav. Det innebär att den tredje poängen kan falla ut även om den andra poängen inte gör det.*

Modell 3:

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. ...	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. ...	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. ...
1 E <sub>R</sub>	1 E <sub>R</sub> och 1 C <sub>R</sub>	1 E <sub>R</sub> , 1 C <sub>R</sub> och 1 A <sub>R</sub>

*Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).*

## Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C<sub>K</sub>) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A<sub>K</sub>) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. =, ≠, <, >, ≤, ≥, ≈, ±, √, $f(x)$ , $f'(x)$ , $f''(x)$ , $x$ , $y$ , ( ), [ ], ∫ dx, bråkstreck, index, lim, VL, HL, symbol för vinkel, gradtecken
Termer	t.ex. absolutbelopp, cirkel, enhetscirkel, polynom, rationellt uttryck, kontinuerlig/diskret funktion, rät linje, andrags-/polynom-/potens-/exponentialfunktion, funktionsvärde, definitions-/värdemängd, punkt, intervall, område, koordinat, koordinatsystem, graf, kurva, skärningspunkt, nollställe, symmetrilinje, lutning, riktningskoefficient, ändpunkt, sekant, tangent, ändringskvot, förändringshastighet, gränsvärde, derivata, andra-derivata, teckenschema, växande/avtagande, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, primitiv funktion, integral, talet e, naturlig logaritm
Hänvisningar	t.ex. till derivatans definition, räta linjens ekvation, tangentens ekvation, cirkelns ekvation, enhetscirkeln, areasatsen, cosinussatsen, sinussatsen, definitionen för sinus
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

## 2. Bedömningsanvisningar

I det här kapitlet finns anvisningar för hur provet ska bedömas.

### Läsanvisning

*Exempel* på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om exempel på bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en hänvisning.

### Instruktioner för bedömning av delprov B

- |   |                   |
|---|-------------------|
| <b>1.</b>   | <b>Max 1/0/0</b>  |
| Korrekt svar $\left( F(x) = \frac{x^3}{3} + 8x + C \right)$ | +1 E <sub>P</sub> |
| <b>2.</b>   | <b>Max 1/0/0</b>  |
| Korrekt svar (2 m/s)  | +1 E <sub>B</sub> |
| <b>3.</b>   | <b>Max 1/0/0</b>  |
| Korrekt svar (B: diskret funktion)                          | +1 E <sub>B</sub> |
| <b>4.</b>   | <b>Max 1/0/0</b>  |
| Korrekt svar (C: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$ )                  | +1 E <sub>B</sub> |
| <b>5.</b>   | <b>Max 1/2/0</b>  |
| a) Korrekt svar ( $f'(x) = 25x^4 + 2x$ )                    | +1 E <sub>P</sub> |
| b) Korrekt svar $\left( f'(x) = \frac{4e^{4x}}{3} \right)$  | +1 C <sub>P</sub> |
| c) Korrekt svar ( $f'(x) = x^{-1,5}$ )                      | +1 C <sub>P</sub> |

- 6.** **Max 0/2/0**  
Korrekt svar ( $A = -5$ ) +1 C<sub>B</sub>  
Korrekt svar ( $B = 50$ ) +1 C<sub>B</sub>
- 7.** **Max 0/1/0**  
Korrekt svar (E) +1 C<sub>B</sub>
- 8.** **Max 0/2/1**  
a) Korrekt svar  $\left(\frac{1}{x-5}\right)$  +1 C<sub>P</sub>  
b) Korrekt svar  $(-17x^4)$  +1 C<sub>P</sub>  
c) Korrekt svar  $((A+5)^9 - 1)$  +1 A<sub>P</sub>
- 9.** **Max 0/1/0**  
Korrekt svar  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  +1 C<sub>B</sub>
- 10.** **Max 0/0/1**  
Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning (1,5) +1 A<sub>B</sub>
- 11.** **Max 0/0/1**  
Korrekt svar ( $x = 4,5$ ) +1 A<sub>B</sub>



## Instruktioner för bedömning av delprov C

12. Max 2/0/0

Godtagbar ansats, bestämmer korrekt primitiv funktion +1 E<sub>P</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (14) +1 E<sub>P</sub>

13. Max 3/3/0

a) Godtagbar ansats, tecknar en ändringskvot, t.ex.  $\frac{6-22}{4}$  +1 E<sub>B</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $-4^{\circ}\text{C}/\text{h}$ ) +1 E<sub>B</sub>

b) Godtagbar ansats, beräknar riktningskoefficienten korrekt och påbörjar en tolkning där det framgår att det handlar om en temperaturförändring vid en viss tidpunkt +1 C<sub>B</sub>  
 med i övrigt godtagbar tolkning, inklusive korrekt enhet och tidpunkt, där det även framgår att temperaturen minskar +1 C<sub>M</sub>

*Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar*







c)

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang som leder till slutsatsen att temperaturen inte kan bli $3^{\circ}\text{C}$ .  Resonemanget inkluderar ett <i>påstående</i> om att ekvationen $3 = 17e^{-0,7x} + 5$ inte går att lösa eller den lägsta temperaturen är $5^{\circ}\text{C}$ .  <div style="text-align: right;">1 E<sub>R</sub></div>	Godtagbart välgrundat resonemang som leder till slutsatsen att temperaturen inte kan bli $3^{\circ}\text{C}$ .  Resonemanget inkluderar en <i>motivering</i> till varför ekvationen $3 = 17e^{-0,7x} + 5$ inte går att lösa eller den lägsta temperaturen är $5^{\circ}\text{C}$ .  <div style="text-align: right;">1 E<sub>R</sub> och 1 C<sub>R</sub></div>	

*Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar*



- 14.** **Max 3/1/0**
- Godtagbar ansats, bestämmer derivatans nollställen,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$  +1 E<sub>P</sub>
- med korrekt bestämning av extrempunkternas koordinater, (1, 4) och (3, 0) +1 E<sub>P</sub>
- Godtagbar verifiering av extrempunkternas karaktär  
(maximipunkt (1, 4) och minimipunkt (3, 0)) +1 E<sub>P</sub>
- Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 C<sub>K</sub>
- Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar* 
- 15.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, bestämmer uttryckets värde korrekt för två positiva och två negativa värden på  $x$  +1 E<sub>B</sub>
- Godtagbar relevant hypotes som baseras på genomförda beräkningar, t.ex. ”Det blir noll.” +1 E<sub>R</sub>
- Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar* 
- 16.** **Max 0/2/1**
- Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer korrekt primitiv funktion,  
$$F(x) = \frac{kx^2}{2} + mx$$
 + 1 C<sub>P</sub>
- Godtagbar välgrundad slutsats om värdet på  $m$  + 1 C<sub>R</sub>
- Godtagbar välgrundad och nyanserad slutsats om värdet på  $k$  + 1 A<sub>R</sub>
- Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar* 
- 17.** **Max 0/1/2**
- a) Godtagbar lösning med korrekt svar (3000) +1 C<sub>M</sub>
- b) Godtagbar lösning med korrekt svar (5000) +1 A<sub>M</sub>
- med insikt om att ett gränsvärde söks och med formellt korrekt bestämning av detta gränsvärde +1 A<sub>B</sub>
- Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar* 

## Instruktioner för bedömning av delprov D

18. **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen  $\frac{x}{\sin 125^\circ} = \frac{12}{\sin 30^\circ}$  +1 E<sub>PL</sub>
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (20 cm) +1 E<sub>PL</sub>

19. **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, tecknar ett uttryck som motsvarar en del av eller hela integralens värde, t.ex.  $3 \cdot 5$  +1 E<sub>PL</sub>
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (27,5) +1 E<sub>PL</sub>
- Kommentar:* Även svaret 27,5 a.e. anses godtagbart i denna uppgift.

20. **Max 2/2/0**
- a) Godtagbar ansats, t.ex. ställer upp ekvationen  $33\,700 e^{-0,034t} = 20\,000$  +1 E<sub>M</sub>
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (15 månader) +1 E<sub>M</sub>
- b) Godtagbar ansats, t.ex. deriverar  $V(t)$  och beräknar  $V'(0)$  +1 C<sub>M</sub>
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (20 månader) +1 C<sub>M</sub>
- Kommentar:* En lösning i b)-uppgiften som utan kommentar eller förklaring utgår från ekvationen  $33\,700 e^{-0,034t} = \frac{33\,700}{2}$  ges noll poäng.

*Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar*



21. **Max 0/4/0**
- Godtagbar ansats, t.ex. beräknar hypotenusans längd i den rätvinkliga triangeln, 26 m + 1 C<sub>PL</sub>
- med godtagbar fortsättning, t.ex. beräknar en användbar vinkel med cosinussatsen +1 C<sub>PL</sub>
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ("Ja, arean blir 247 m<sup>2</sup> så gräsfröna räcker.") +1 C<sub>PL</sub>
- Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 C<sub>K</sub>

*Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar*



22. Max 0/0/2
- Godtagbar ansats, visar insikt om att funktionens derivata ska undersökas, t.ex. genom att använda att  $V''(t) = 0$  och teckna ekvationen  $0,6t - 2,46 = 0$  +1 A<sub>M</sub>
- med i övrigt godtagbar lösning, där  $V'(4,1)$ ,  $V'(0)$  och  $V'(6)$  undersöks, med godtagbart svar ("Mellan 1,5 kg/år och 6,5 kg/år.") +1 A<sub>M</sub>

*Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar*



23. Max 0/0/2
- Godtagbar ansats, inleder ett välgrundat generellt och nyanserat resonemang genom att konstatera att positiv derivata innebär att funktionen är (strängt) växande +1 A<sub>R</sub>
- med godtagbart slutfört resonemang med korrekt slutsats (En reell lösning) +1 A<sub>R</sub>

*Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar*



24. Max 0/2/3
- a) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar areafunktionen  $A(x) = x(-0,5x^3 + x + 3)$  +1 C<sub>M</sub>
- med godtagbar grafisk/numerisk bestämning av sidlängden inklusive verifiering av maximum (1,43 dm) +1 C<sub>M</sub>
- b) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen  $-0,5x^3 + x + 3 = x$  +1 A<sub>M</sub>
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (1,82 dm) +1 A<sub>M</sub>
- Lösningen (till deluppgift a och b) kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 A<sub>K</sub>

*Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar*



25.

Max 0/0/3

Godtagbar ansats, t.ex. sätter diskriminanten lika med noll i ekvationen

$$f'(x) = 0 \text{ eller tecknar ekvationssystemet } \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f''(x) = 0 \end{cases} \quad +1 \text{ A}_{\text{PL}}$$

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $k = 8,7$ ) +1 A<sub>PL</sub>

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 A<sub>K</sub>

*Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar*



### 3. Exempel på bedömda elevlösningar

#### Uppgift 13b

##### Elevlösningsexempel 13b.1 (0 poäng)

$$k = \frac{6-0}{3-5} = -3 \quad \text{vilket betyder att under andra timmen minskar temperaturen med } 3^\circ\text{C i timmen}$$

*Bedömningskommentar till exemplet:* Tolkningsen motsvarar en ändringskvot och inte en derivata. Elevlösningen ges noll poäng.

##### Elevlösningsexempel 13b.2 (1 C<sub>B</sub>)

$$\text{riktningskoeff } k = \frac{-15}{5} = -3^\circ\text{C} \quad \text{Då det gått 2 timmar minskar temperaturen med } 3^\circ\text{C}$$

*Bedömningskommentar till exemplet:* Det framgår att det rör sig om en temperaturförändring vid en viss tidpunkt vilket ger en begreppsöäng på C-nivå. Däremot är inte tolkningen korrekt eftersom temperaturändringen anges med fel enhet.

##### Elevlösningsexempel 13b.3 (1 C<sub>B</sub> och 1 C<sub>M</sub>)

$$\text{tangentens } k = \frac{12-3}{1-4} = -\frac{9}{3} = -3$$

När trä timmar gått så minskar temperaturen med  $-3^\circ\text{C}$  per timme!

*Bedömningskommentar till exemplet:* Det framgår att det rör sig om en temperaturförändring vid en viss tidpunkt vilket ger en begreppsöäng på C-nivå. Tolkningsen är dock inte helt korrekt eftersom ordet "minskar" används samtidigt med det negativa uttrycket " $-3^\circ\text{C}$  per timme". Sammantaget bedöms elevlösningen uppfylla kraven för en begreppsöäng på C-nivå samt nått och jämnt kraven för en modelleringsöäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 13b.4 (1 C<sub>B</sub> och 1 C<sub>M</sub>)

$$(1, 12) \text{ och } (4, 3) \quad \text{då klockan är 14 ändras}$$

$$k = \frac{3-12}{4-1} = \frac{-9}{3} = -3 \quad \text{den med } -3^\circ/\text{h}$$

*Bedömningskommentar till exemplet:* Det framgår att det rör sig om en minskning eftersom ändringen anges som negativ, " $-3^\circ/\text{h}$ ". Enheten är inte angiven i Celsius och det framgår inte tydligt att det rör sig om en temperaturförändring eftersom ordet "den" används istället för temperaturen. Sammantaget bedöms elevlösningen uppfylla kraven för en begreppsöäng på C-nivå samt nått och jämnt kraven för en modelleringsöäng på C-nivå.

## Uppgift 13c

## Elevlösningsexempel 13c.1 (0 poäng)

$$17e^{-0.7x} + 5 = 3$$

$$17e^{-0.7x} = -2$$

$$e^{-0.7x} = -2/17$$

$$-0.7x = \ln(-2/17)$$

$$x = \ln(-2/17)/-0.7$$

Ja, här  $x$  är detta är temperaturen  $3^\circ$

*Bedömningskommentar till exemplet:* Elevlösningen leder till en felaktig slutsats och ges därmed noll poäng.

Elevlösningsexempel 13c.2 (1 E<sub>R</sub>)

$$T(x) = 17e^{-0.7x} + 5$$

Nej, tempen kan inte bli 3 grader för den lägsta är  $5^\circ$ . Det syns i formeln.

*Bedömningskommentar till exemplet:* Elevlösningen leder till en godtagbar slutsats och baseras på påståendet att det "syns i formeln" att "den lägsta är  $5^\circ\text{C}$ ". Elevlösningen ges en resonansöäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 13c.3 (1 E<sub>R</sub> och 1 C<sub>R</sub>)

$$3 = 17e^{-0,7x} + 5$$

$$-2 = 17e^{-0,7x}$$

↑                      ↑                      svaret är nej!

negativ              alltid positiv

*Bedömningskommentar till exemplet:* Elevlösningen leder till en godtagbar slutsats och baseras på en välgrundad motivering. Elevlösningen ges båda resonemangspoängen.

Elevlösningsexempel 13c.4 (1 E<sub>R</sub> och 1 C<sub>R</sub>)

$$T(x) = 17e^{-0,7x} + 5$$

När  $x$ -et går mot stora tal kommer  $T$   
att bli  $5^\circ$  så  $T$  kan inte vara  $3^\circ$

*Bedömningskommentar till exemplet:* Elevlösningen leder till en godtagbar slutsats och baseras på en välgrundad motivering (även om den inte är helt formellt korrekt). Elevlösningen ges båda resonemangspoängen.



## Uppgift 14

Elevlösningsexempel 14.1 (2 E<sub>P</sub> och 1 C<sub>K</sub>)

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$0 = 3x^2 - 12x + 9$$

$$0 = x^2 - 4x + 3$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{2^2 - 3}}{2} = 2 \pm 1$$

$$x_1 = 3 \quad \text{och} \quad x_2 = 1$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 18 - 12 = 6 \Rightarrow \text{Maximipunkt}$$

$$f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = 6 - 12 = -6 \Rightarrow \text{Minimipunkt}$$

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0 \quad \text{och} \quad f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4$$

Koordinaterna är (3, 0) och (1, 4)

*Bedömningskommentar till exemplet:* Elevlösningen är korrekt när det gäller derivatans nollställen och extrempunkternas koordinater. Eftersom slutsatserna av verifieringen är felaktiga uppfylls inte kraven för den tredje procedurpoängen på E-nivå. När det gäller kommunikation bedöms uppgiften vara behandlad i sin helhet och i huvudsak korrekt. Kraven för kommunikation på C-nivå anses vara uppfyllda trots att ett sammanfattat svar saknas. Sammantaget ges elevlösningen de två första procedurpoängen på E-nivå samt kommunikationspoängen på C-nivå.

Elevlösningsexempel 14.2 (3 E<sub>P</sub> och 1 C<sub>K</sub>)

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	$x$   0   1   2   3   4
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$	$f'(x)$   +   0   -   0   +
$x^2 - 4x + 3 = 0$	$f(x)$   ↗ MAX   ↘ MIN   ↗
$x = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3}$	
$x_1 = 2 + 1 = 3$	$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0$
$x_2 = 2 - 1 = 1$	$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4$
SVAR: $(1, 4)$ är en maxpunkt $\hat{=}$ $(3, 0)$ är en minpunkt	

*Bedömningskommentar till exemplet:* Uppgiften är löst i sin helhet inklusive verifiering av extrempunkter. När det gäller kommunikation är lösningen strukturerad och möjlig att följa och förstå trots att det felaktiga skrivsättet ” $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$ ” används, att rottecknet inte omfattar hela uttrycket och att de beräkningar som ligger bakom teckenschemat inte redovisas. Elevlösningen ges tre procedurpoäng på E-nivå samt nått och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå.

## Uppgift 15

Elevlösningsexempel 15.1 (1 E<sub>R</sub>)

$\sqrt{4x^2} -  2x $	
$x = 5$ $\sqrt{4 \cdot 5^2} -  2 \cdot 5  = 10 - 10 = 0$	Alltså, om $x$ är positivt blir det +0. Om $x$ är negativt blir det 4 gånger så stort fast positivt
$x = -5$ $\sqrt{4 \cdot (-5)^2} -  2 \cdot (-5)  = 10 + 10 = 20$	
$x = 1$ $\sqrt{4 \cdot 1^2} -  2 \cdot 1  = 2 - 2 = 0$	
$x = -1$ $\sqrt{4 \cdot (-1)^2} -  2 \cdot (-1)  = 2 + 2 = 4$	

*Bedömningskommentar till exemplet:* Utifrån felaktiga beräkningar med negativa tal formuleras en godtagbar hypotes. Elevlösningen ges nått och jämnt resonemangspoängen på E-nivå.

Elevlösningsexempel 15.2 (1 E<sub>B</sub> och 1 E<sub>R</sub>)

$x$ -värden	1, 2, -1, -2	
$\sqrt{4 \cdot 1^2} -  2 \cdot 1  =$	$2 - 2 = 0$	Hypotes: $\sqrt{4x^2} -  2x  = 2x - 2x = 0$
$\sqrt{4 \cdot 2^2} -  2 \cdot 2  =$	$4 - 4 = 0$	Differensen blir alltid
$\sqrt{4 \cdot (-2)^2} -  2 \cdot (-2)  =$	$4 - 4 = 0$	hell eftersom $\sqrt{4x^2} =  2x $
$\sqrt{4 \cdot (-1)^2} -  2 \cdot (-1)  =$	$2 - 2 = 0$	oavsett värde på $x$ .

Bedömningskommentar till exemplet: Beräkningarna är korrekt utförda och en korrekt hypotes formuleras, men den generella härledningen är felaktig eftersom  $|2x| = 2x$  och  $\sqrt{4x^2} = 2x$  inte gäller för negativa värden på  $x$ . Trots detta anses kraven för resonemangspoängen vara uppfyllda eftersom en generell härledning inte efterfrågas. Sammantaget ges elevlösningen en begrepps- och en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 15.3 (1 E<sub>B</sub> och 1 E<sub>R</sub>)

	$\sqrt{4x^2} -  2x $	
$x=3$	$\sqrt{4 \cdot 3^2} -  2 \cdot 3  = 6 - 6 = 0$	} <u>Det blir noll!</u>
$x=-3$	$\sqrt{4 \cdot (-3)^2} -  2 \cdot (-3)  = 6 - 6 = 0$	
$x=10$	$\sqrt{4 \cdot 10^2} -  2 \cdot 10  = 20 - 20 = 0$	
$x=-10$	$\sqrt{4 \cdot (-10)^2} -  2 \cdot (-10)  = 20 - 20 = 0$	

Bedömningskommentar till exemplet: Parentes saknas kring de negativa talen under rottecknen men beräkningarna är utförda som om parenteser var utsatta. Hypotesen är korrekt. Elevlösningen ges nätt och jämnt en begrepps- och en resonemangspoäng på E-nivå.

## Uppgift 16

Elevlösningsexempel 16.1 (1 C<sub>P</sub> och 1 C<sub>R</sub>)

$$f(x) = kx + m$$

$$\int_{-2}^2 (kx + m) dx = \left[ \frac{kx^2}{2} + mx \right]_{-2}^2 = \frac{k \cdot 2^2}{2} + m \cdot 2 - \left( \frac{k \cdot (-2)^2}{2} - 2m \right) =$$

$$= 2k + 2m - 2k + 2m = 4m = 4, \quad m = 1$$

$$\textcircled{k=2} \quad \int_{-2}^2 (2x+1) dx = \left[ \frac{2x^2}{2} + x \right]_{-2}^2 = 4+2 - (4-2) = 4$$

$$\textcircled{k=-5} \quad \int_{-2}^2 (-5x+1) dx = \left[ \frac{-5x^2}{2} + x \right]_{-2}^2 = -5 \cdot 2 + 2 - (-5 \cdot 2 - 2) = 4$$

$$\textcircled{k=0} \quad \int_{-2}^2 1 dx = \left[ x \right]_{-2}^2 = 2 - (-2) = 4$$

Alltså  $m=1$  och  $k$  kan vara allt möjligt!

*Bedömningskommentar till exemplet:* Elevlösningen ger en välgrundad motivering till varför  $m=1$  men ingen välgrundad motivering till varför  $k$  kan anta alla värden, eftersom endast specialfall undersöks. Elevlösningen ges en procedur- och en resonemangspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 16.2 (1 C<sub>P</sub> och 1 C<sub>R</sub>)

$$f(x) = kx + m$$

$$\int_{-2}^2 (kx + m) dx = \left[ \frac{kx^2}{2} + mx \right]_{-2}^2 = 2k + 2m - (2k - 2m) = 4m = 4$$

SVAR:  $m=1$  och  $k$  kan vara vad som helst!

*Bedömningskommentar till exemplet:* Elevlösningen ger en välgrundad motivering till varför  $m=1$  men ingen motivering till varför  $k$  kan anta alla värden. Elevlösningen ges en procedur- och en resonemangspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 16.3 (1 C<sub>P</sub>, 1 C<sub>R</sub> och 1 A<sub>R</sub>)

$$f(x) = kx + m$$

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^2 (kx + m) dx = \left[ 0.5kx^2 + mx \right]_{-2}^2 =$$

$$= F(2) - F(-2) = (0.5k \cdot 4 + 2m) - (0.5k \cdot 4 - 2m) =$$

$$= 2k + 2m - 2k + 2m = 2m + 2m = 4m$$

$4m = 4$       Eftersom  $k$  kan förnkles bort  
 $m = 1$       i integralen, kan  $k$  anta alla  
värden och  $m$  måste vara 1.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar korrekta välgrundade slutsatser om  $k$  och  $m$ .

## Uppgift 17b

Elevlösningsexempel 17b.1 (1 A<sub>M</sub>)

$$N(t) = \frac{15000}{3 + 2e^{-0.5t}}$$

Om  $t$  blir stort kommer  $2e^{-0.5t}$  att bli noll. Då blir fiskantalet  $\frac{15000}{3 + 0} = \boxed{5000}$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar att den övre gränsen är 5000 fiskar, vilket uppfyller kraven för modelleringspoängen på A-nivå. Lösningen är dock inte formellt korrekt vid gränsvärdesbestämningen, eftersom det inte framgår att  $e^{-0.5t}$  går mot noll då  $t$  går mot oändligheten. Lösningen uppfyller därmed inte kraven för begreppspoängen på A-nivå.

Elevlösningsexempel 17b.2 (1 A<sub>M</sub> och 1 A<sub>B</sub>)

$$N(t) = \frac{15000}{3 + 2e^{-0,5t}}$$

Då  $t \rightarrow \infty$  kommer nämnaren att  $\rightarrow 3$

$$\frac{15000}{3} = 5000 \quad \underline{\underline{\text{SVAR}} \quad 5000 \text{ fiskar}}$$

*Bedömningskommentar till exemplet:* I elevlösningen framgår att ett gränsvärde söks och bestämningen av detta är formellt korrekt även om lösningen är kortfattad. Elevlösningen ges både modelleringspoängen samt nätt och jämnt begrepps-poängen på A-nivå.

## Uppgift 20

Elevlösningsexempel 20.1 (2 E<sub>M</sub>)

$$a) V(t) = 33700 e^{-0,034t}$$

$$20000 = 33700 e^{-0,034t}$$

$$\frac{20000}{33700} = e^{-0,034t}$$

$$\ln\left(\frac{20000}{33700}\right) = -0,034t$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{20000}{33700}\right)}{-0,034}$$

$$t \approx 15$$

SVAR: 15 mån efter  
inlöpet

$$b) \frac{33700}{2} = 33700 e^{-0,034t}$$

$$0,5 = e^{-0,034t}$$

$$\ln 0,5 = -0,034t$$

$$t = \frac{\ln 0,5}{-0,034}$$

$$t = 20$$

SVAR: 20 mån efter  
inlöpet

*Bedömningskommentar till exemplet:* Elevlösningen visar en korrekt löst a)-uppgift vilket ger två modelleringspoäng på E-nivå. I b)-uppgiften ges ingen kommentar om varför den tecknade ekvationen kan ge ett korrekt svar, vilket ger noll poäng. Sammantaget ges lösningen två modelleringspoäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 20.2 (2 E<sub>M</sub> och 2 C<sub>M</sub>)

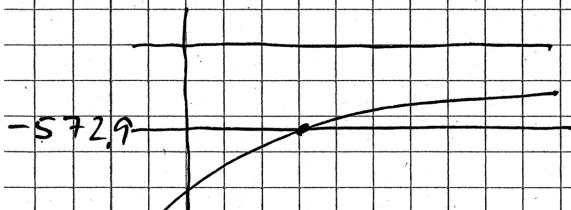
$$a) \quad 3370 e^{-0,034t} = 20000$$

Intersect  $t = 15,3$  mån

$$b) \quad V'(t) = -1145,8 e^{-0,034t}$$

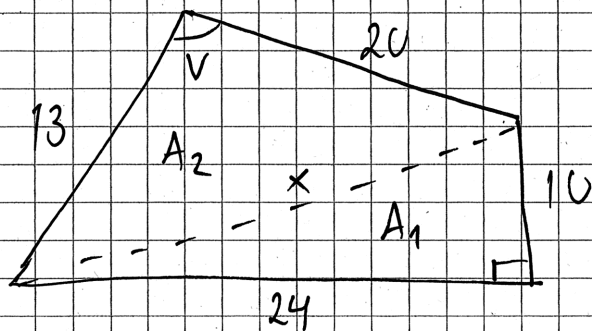
$$V'(0) = -1145,8$$

$$V'(0)/2 = -572,9$$

Intersect  $t = 20,4$  mån

*Bedömningskommentar till exemplet:* Elevlösningen visar en knapphändig men godtagbar lösning till de båda deluppgifterna där digitala hjälpmedel använts. Trots lösningens knapphändighet anses den nått och jämnt uppfylla kraven för två modelleringspoäng på E-nivå och två modelleringspoäng på C-nivå.

## Uppgift 21

Elevlösningsexempel 21.1 (3 C<sub>PL</sub> och 1 C<sub>K</sub>)

$$x^2 = 10^2 + 24^2$$

$$x^2 = 676$$

$$x = 26 \text{ m}$$

$$250 \text{ m}^2 \text{ från}$$

$$A_1 = \frac{10 \cdot 24}{2} = 120 \text{ m}^2$$

$$A_2 \quad x^2 = 26^2 = 13^2 + 20^2 - 2 \cdot 13 \cdot 20 \cdot \cos V$$

$$\cos V = \frac{26^2 - 13^2 - 20^2}{-2 \cdot 13 \cdot 20}$$

$$V = 101,87^\circ$$

$$A_2 = \frac{13 \cdot 20 \cdot \sin 101,87^\circ}{2} = 127 \text{ m}^2$$

$$\text{Area} = 120 + 127 = 247 \text{ m}^2 \text{ Från rader!}$$

*Bedömningskommentar till exemplet:* Elevlösningen är korrekt och ges tre problemlösningspoäng på C-nivå. När det gäller kommunikationen redovisas en tydlig figur och alla relevanta beräkningar. Användningen av symboler, index och enheter bedöms vara i huvudsak korrekt. Enheter saknas på något ställe och  $\pm$  saknas i samband med ekvationslösningen i början. Hänvisning till Pythagoras sats, areasatsen och cosinussatsen saknas. Sammantaget bedöms lösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå.



## Uppgift 22

Elevlösningsexempel 22.1 (1 A<sub>M</sub>)

$$V(t) = 0,10t^3 - 1,23t^2 + 6,51t + 3,72$$

$$V'(t) = 0,30t^2 - 2,46t + 6,51$$

t	V'(t)
0	$= 0,30 \cdot 0^2 - 2,46 \cdot 0 + 6,51 \approx 6,51$
1	$= 0,30 \cdot 1^2 - 2,46 \cdot 1 + 6,51 \approx 4,35$
2	$= 0,30 \cdot 2^2 - 2,46 \cdot 2 + 6,51 \approx 2,79$
3	$= 0,30 \cdot 3^2 - 2,46 \cdot 3 + 6,51 \approx 1,83$
4	$= 0,30 \cdot 4^2 - 2,46 \cdot 4 + 6,51 \approx 1,47$
5	$= 0,30 \cdot 5^2 - 2,46 \cdot 5 + 6,51 \approx 1,71$
6	$= 0,30 \cdot 6^2 - 2,46 \cdot 6 + 6,51 \approx 2,55$

Viktens ändringshastighet kan vara

$$1,47 \leq V'(t) \leq 6,51$$

*Bedömningskommentar till exemplet:* Elevlösningen visar insikt om att derivatans största och minsta värde ska undersökas. Lösningen visar hur ett närliggande värde till derivatans nollställe,  $x = 4$ , erhålls med hjälp av heltalsprövning. Denna prövning styrker dock inte att det endast finns ett nollställe till derivatan i det aktuella intervallet och inte heller att ett nollställe verkligen hittats. Därmed finns ingen grund för slutsatsen  $1,47 \leq V'(t) \leq 6,51^*$ . Sammantaget ges elevlösningen första modelleringspoängen på A-nivå.

\* Däremot, om prövningen varit mer systematisk kring  $x = 4$ , minimum då  $x = 4,1$  styrkts genom diskussion om symmetriegenskaper hos andragradsfunktionen  $V'$  och lösningen i övrigt varit godtagbar skulle två modelleringspoäng på A-nivå kunna erhållas.

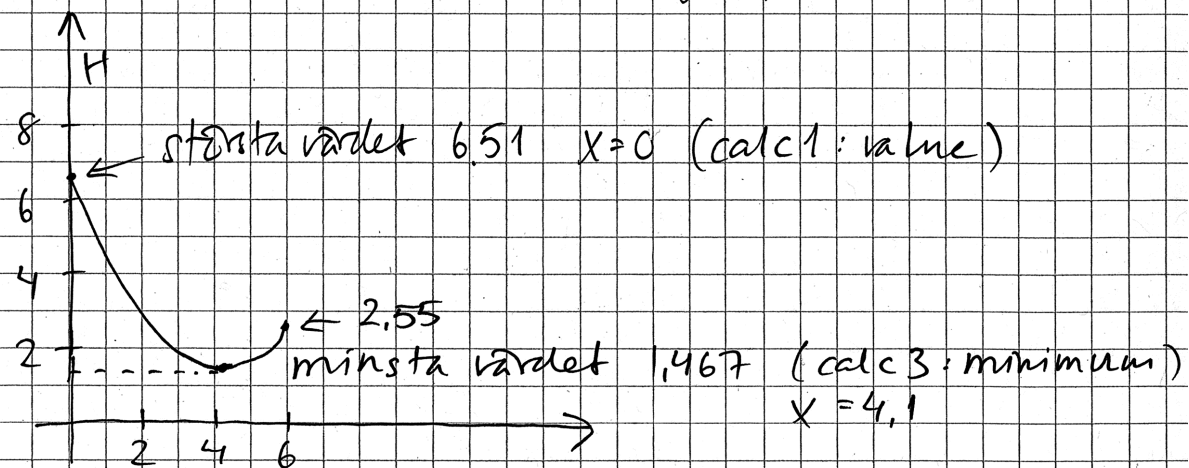
## Elevlösningsexempel 22.2 (2 AM)

$$U(t) = 0,10t^3 - 1,23t^2 + 6,51t + 3,72$$

Hastigheten på vikten är

$$H(t) = 0,30t^2 - 2,46t + 6,51$$

På räknaren ritas jag grafen  $H(t)$



Hastigheten på vikten varierar mellan  
1,467 kg/år och 6,51 kg/år

*Bedömningskommentar till exemplet:* I elevlösningen visas hur ändringshastigheten undersöks på grafräknaren. Grafen är begränsad till det aktuella intervallet och visar insikt om vilka tre värden som ska undersökas. Det största och minsta värdet har bestämts med hjälp av grafräknaren. Funktionsvärdet 2,55 är inte nödvändigt att bestämma då figuren tydligt visar det största och minsta värdet inom det aktuella intervallet. Elevlösningen ges två modellringspoäng på A-nivå.

## Uppgift 23

## Elevlösningsexempel 23.1 (0 poäng)

$$\text{Om } f(x) = 2x + 4 \text{ är } f'(x) = 2 \text{ dvs } > 0$$

för alla  $x$

$$2x + 4 = 0$$

$$x = -2$$

alltså finns bara en reel

lösning då  $f'(x) > 0$

*Bedömningskommentar till exemplet:* Eftersom slutsatsen baseras på ett specialfall och inte en generell behandling ges elevlösningen noll poäng.

**Elevlösningsexempel 23.2 (1 AR)**

Om grafen aldrig har negativ lutning ( $= f'(x) > 0$ ) så kan den bara skära  $x$ -axeln ( $f(x) = 0$ ) max en gång, eftersom efter den skurit  $x$ -axeln så kommer värdet bara att öka (grafens går uppåt).

*Bedömningskommentar till exemplet:* Av elevlösningen framgår att positiv derivata innebär att funktionen är växande. Däremot påstås att grafen skär  $x$ -axeln "max en gång", vilket är felaktigt, och det framgår inte tydligt att ekvationen  $f(x) = 0$  har en reell lösning. Sammantaget anses elevlösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för den första resonemangspoängen på A-nivå.

**Elevlösningsexempel 23.3 (2 AR)**

$f'(x) > 0$  för alla  $x$

↓

Om  $f'(x) > 0$  så är  $f(x)$  bara växande.

$\Rightarrow$  Alltså inga max- eller minpunkter.

Ingen terrasspunkt heller. Då finns det en reell lösning för  $f(x) = 0$  och det är där funktionen skär  $x$ -axeln.

*Bedömningskommentar till exemplet:* I elevlösningen ges ett resonemang som leder fram till den korrekta slutsatsen att ekvationen har en reell lösning. Informationen "Alltså inga max- eller minpunkter. Ingen terrasspunkt heller." är inte nödvändig för att resonemanget ska anses vara fullständigt men tydliggör resonemanget. Lösningen bedöms uppfylla kraven för två resonemangspoäng på A-nivå.

## Uppgift 24

Elevlösningsexempel 24.1 (1 C<sub>M</sub> och 2 A<sub>M</sub>)

$$a) A = x \cdot y = x(-0,5x^3 + x + 3) \text{ där } x \text{ är bredden}$$

$$A = -0,5x^4 + x^2 + 3x$$

$$A' = -2x^3 + 2x + 3 \quad A' = 0$$

$$0 = -2x^3 + 2x + 3 \quad \text{Miniräknerens Equation}$$

$$x = 1,431... \approx 1,43$$

$$b) A = x^2 \quad 2,179 > x > 0$$

$$x = 4$$

$$x = -0,5x^3 + x + 3$$

$$0 = -0,5x^3 + 3$$

$$x \approx 1,817$$

*Bedömningskommentar till exemplet:* Lösningen till deluppgift a) är godtagbar förutom att verifiering av maximum saknas och därmed ges den första modelleringspoängen på C-nivå men inte den andra. Lösningen till deluppgift b) är korrekt vilket ger två modelleringspoäng på A-nivå. Eftersom verifieringen saknas i deluppgift a) anses inte uppgiften vara löst i sin helhet och därmed bedöms inte kommunikation. Sammantaget ges elevlösningen en modelleringspoäng på C-nivå och två modelleringspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 24.2 (2 C<sub>M</sub>, 2 A<sub>M</sub> och 1 A<sub>K</sub>)

a) Arean för servestema blir  $xy$

$$y = -0.5x^3 + x + 3$$

ins  $y$  i  $xy$  ger det

$$x(-0.5x^3 + x + 3) = A$$

$$A = -0.5x^4 + x^2 + 3x$$

Extrempunkterna är då  $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 2x - 2x^3 + 3$$

$$0 = 2x - 2x^3 + 3$$

Equation ger mig  $x = 1.431$

Jag ritar upp  $f'(x)$  på räknaren och ser att derivatan är negativ då  $x = 1.43$ , dvs. max!

b) Om servestema ska SVAR: Bredden är 1.43 dm

vara kvadratiska innebär det att  $y = x$

vilket ger ekvationssystemet

$$y = x$$

$$y = -0.5x^3 + x + 3$$

$$x = -0.5x^3 + x + 3$$

$$0 = -0.5x^3 + 3$$

$$x = \sqrt[3]{6}$$

$$\text{SVAR: Bredden är } \sqrt[3]{6} \text{ dm}$$

*Bedömningskommentar till exemplet:* Lösningen till deluppgift a) och b) är korrekta och ges därmed två modelleringspoäng på C-nivå och två modelleringspoäng på A-nivå. När det gäller kommunikation anses lösningen vara lätt att följa och förstå förutom att variabeln  $x$  inte är definierad och att det inte tydligt framgår hur verifiering av maximum utförts på räknaren. I deluppgift b) anges svaret i exakt form vilket bedöms som godtagbart. Sammantaget anses elevlösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för kommunikationspoängen på A-nivå.

## Uppgift 25

## Elevlösningsexempel 25.1 (2 APL)

$$f(x) = x^3 + kx^2 + 2,9kx$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2kx + 2,9k$$

$$f''(x) = 6x + 2k$$

$$(1) \quad 3x^2 + 2kx + 2,9k = 0$$

$$(2) \quad 6x + 2k = 0$$

$$(2) \quad 6x + 2k = 0$$

$$k = -3x$$

sätt in i (1)

$$3x^2 + 2 \cdot (-3x) \cdot x + 2,9 \cdot (-3x) = 0$$

$$3x^2 - 6x^2 - 8,7x = 0$$

$$-3x^2 - 8,7x = 0$$

$$x^2 + 2,9x = 0$$

$$x = \frac{-2,9 \pm \sqrt{(2,9)^2}}{2} = \frac{-2,9 \pm 2,9}{2}$$

$$x_1 = 0 \quad \rightarrow k_1 = -3 \cdot 0 = 0$$

$$x_2 = -2,9 \quad \rightarrow k_2 = -3 \cdot (-2,9) = 8,7$$

$k > 0$  bortse från ena roten

SVAR:  $k = 8,7$

*Bedömningskommentar till exemplet:* I elevlösningen tecknas ett korrekt ekvationssystem som mynnar ut i ett korrekt svar. Därmed ges två problemlösningspoäng på A-nivå. När det gäller kommunikation är elevlösningen inte helt lätt att följa och förstå i inledningen eftersom det inte framgår varför andraderivatet sätts till noll. Parenteser runt negativa tal saknas. Därmed anses inte kraven för kommunikationspoängen på A-nivå vara uppfyllda.

Elevlösningsexempel 25.2 (1 A<sub>PL</sub> och 1 A<sub>K</sub>)

$$f(x) = x^3 + kx^2 + 2,9kx$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2kx + 2,9k$$

$$3x^2 + 2kx + 2,9k = 0$$

$$x^2 + \frac{2k}{3}x + \frac{2,9k}{3} = 0$$

$$x = \frac{-k}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{-k}{3}\right)^2 - \frac{2,9k}{3}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{-k}{3}\right)^2 - \frac{2,9k}{3}} = 0$$

$$\frac{k^2}{9} = \frac{2,9k}{3}$$

$$k = 3 \cdot 2,9 = 8,7$$

Vid en terrasspunkt har  $f'(x)$  bara ett nollställe. Eftersom det bara ska finnas ett nollställe är

*Bedömningskommentar till exemplet:* I elevlösningen tecknas ekvationen  $f'(x) = 0$  och diskriminanten sätts lika med noll. Lösningen av andragradsekvationen är felaktig då endast en lösning presenteras utan att det förklaras varför. Därmed uppfylls inte kraven för den andra problemlösningspoängen på A-nivå. När det gäller kommunikation anses uppgiften vara löst i sin helhet (trots den felaktiga ekvationslösningen) och är i övrigt lätt att följa och förstå eftersom det framgår varför diskriminanten sätts lika med noll. Lösningen är välstrukturerad och innehåller korrekt använda symboler. Kraven för kommunikationspoängen på A-nivå anses därmed vara uppfyllda.