Delprov B	Uppgift 1–11. Endast svar krävs.
Delprov C	Uppgift 12–17. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter för Delprov B och Delprov C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 67 poäng varav 24 E-, 24 C- och 19 A-poäng.

Gräns för provbetyget
E: 17 poäng
D: 26 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 34 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 44 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 53 poäng varav 11 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: ____________________

Födelsedatum: ____________________

Gymnasieprogram/Komvux: ____________________

Delprov B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs*. Skriv dina svar direkt i elevhäftet.

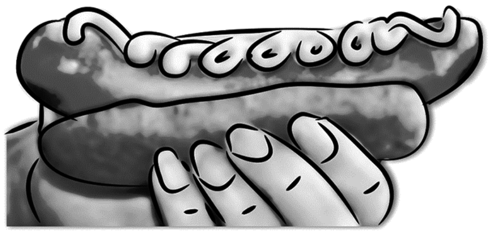
1. Bestäm *alla* primitiva funktioner till $f(x) = x^2 + 8$

$F(x) =$ ____________________ (1/0/0)

2. Ayse kastar en boll rakt upp i luften. Bollens höjd ges av sambandet
$s(t) = 1{,}5 + 12t - 5t^2$
där $s(t)$ är höjden över marken i meter och t är tiden i sekunder efter uppkastet.

Bestäm bollens hastighet vid tiden $t = 1$ sekund. ________________ m/s (1/0/0)

3. Mattias säljer varmkorv på en fotbollsmatch. Korvarna kostar 20 kronor per styck. Mattias intäkt i kronor är en funktion av antalet sålda korvar.



Vilket av alternativen A–E är korrekt?

Funktionen är en …

A. andragradsfunktion.

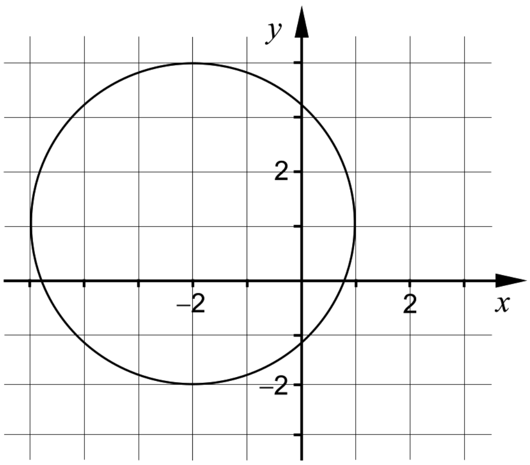
B. diskret funktion.

C. exponentialfunktion.

D. konstant funktion.

E. kontinuerlig funktion. ____________________ (1/0/0)

4. Ett av alternativen A–H visar ekvationen för cirkeln i figuren. Vilket? ____________________ (1/0/0)



A. $(x+1)^2+(y-2)^2=9$

B. $(x-2)^2+(y+1)^2=9$

C. $(x+2)^2+(y-1)^2=9$

D. $(x-1)^2+(y+2)^2=9$

E. $(x+1)^2+(y-2)^2=3$

F. $(x-2)^2+(y+1)^2=3$

G. $(x+2)^2+(y-1)^2=3$

H. $(x-1)^2+(y+2)^2=3$

5. Bestäm $f'(x)$.

a) $f(x)=5x^5+x^2-2$ $\quad f'(x)=$ ____________________ (1/0/0)

b) $f(x)=\dfrac{e^{4x}-e}{3}$ $\quad f'(x)=$ ____________________ (0/1/0)

c) $f(x)=-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $\quad f'(x)=$ ____________________ (0/1/0)

6. I uttrycket $\dfrac{x-A}{2B-x^2}$ är A och B konstanter.

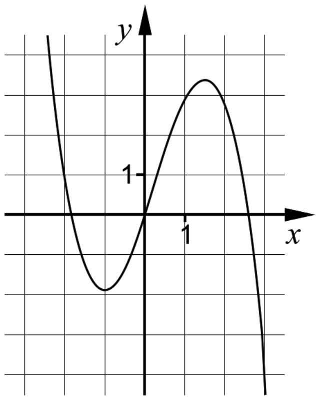
Bestäm A och B så att följande två villkor gäller:

- Uttrycket har värdet 0 då $x=-5$
- Uttrycket är inte definierat för $x=10$ och $x=-10$

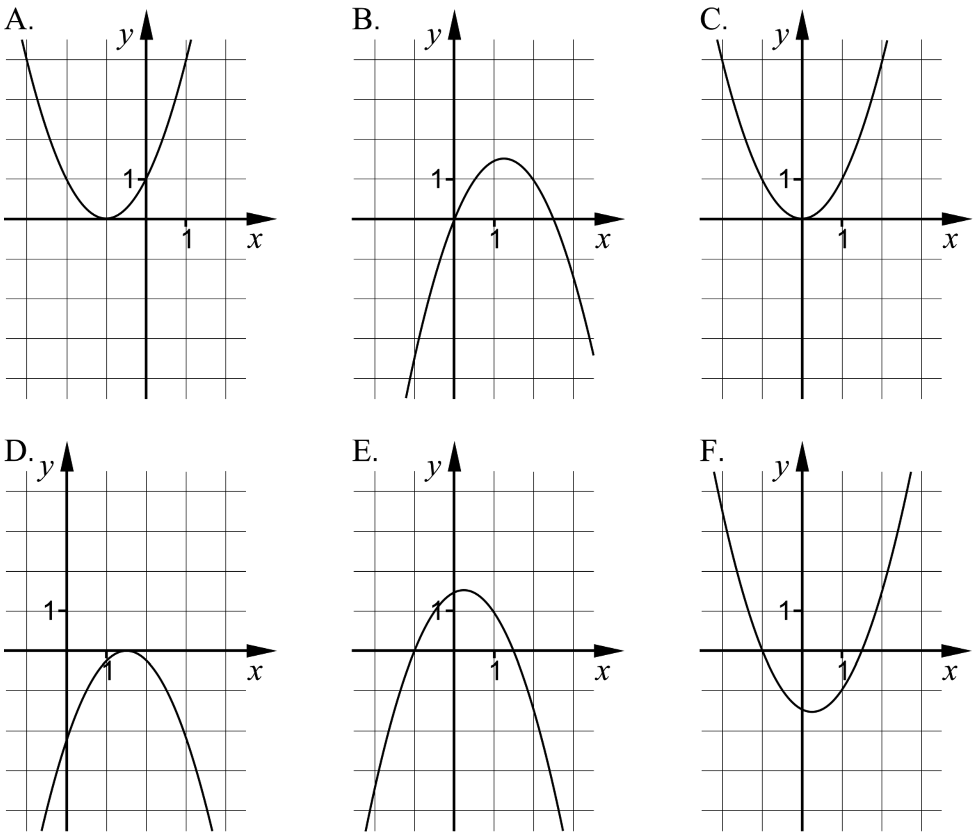
$A=$ ____________________ (0/1/0)

$B=$ ____________________ (0/1/0)

7. Figuren visar grafen till funktionen f.



Ett av alternativen A–F visar grafen till funktionens derivata f'. Vilket? _____________________ (0/1/0)



8. Förenkla uttrycken så långt som möjligt.

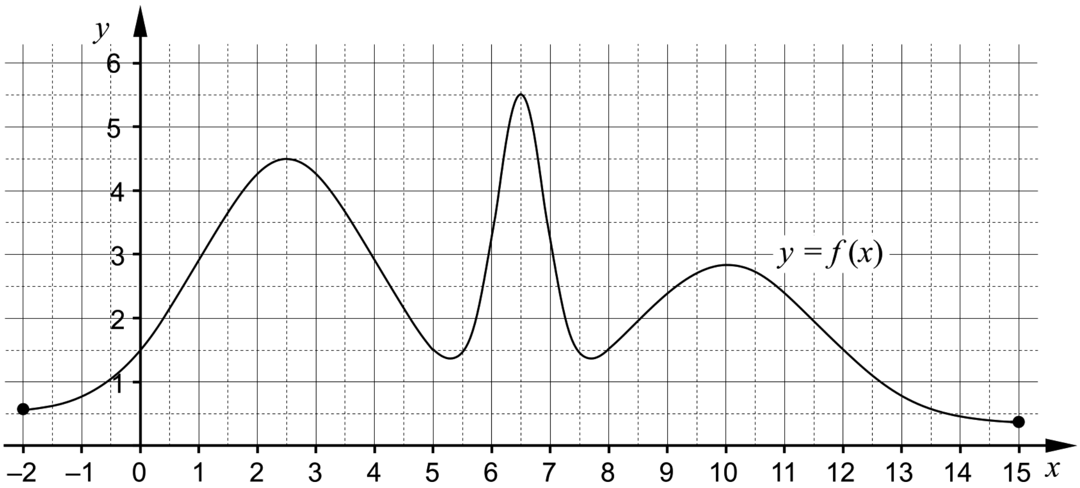
a) $\dfrac{2x-10}{2x^2-20x+50}$ ______________________ (0/1/0)

b) $-x^4-(-2x)^4$ ______________________ (0/1/0)

c) $\dfrac{-A+(A+5)^{10}-5}{A+5}$ ______________________ (0/0/1)

9. Bestäm det exakta värdet för $\sin 300°$ ______________________ (0/1/0)

10. Figuren visar grafen till funktionen *f* i intervallet $-2 \le x \le 15$



För vilket värde på *p* antar $\int_p^{p+2} f(x)\,\mathrm{d}x$ sitt största värde?

______________________ (0/0/1)

11. Funktionen *g* är en tredjegradsfunktion. Tabellen visar derivatans tecken för några olika värden på *x*.

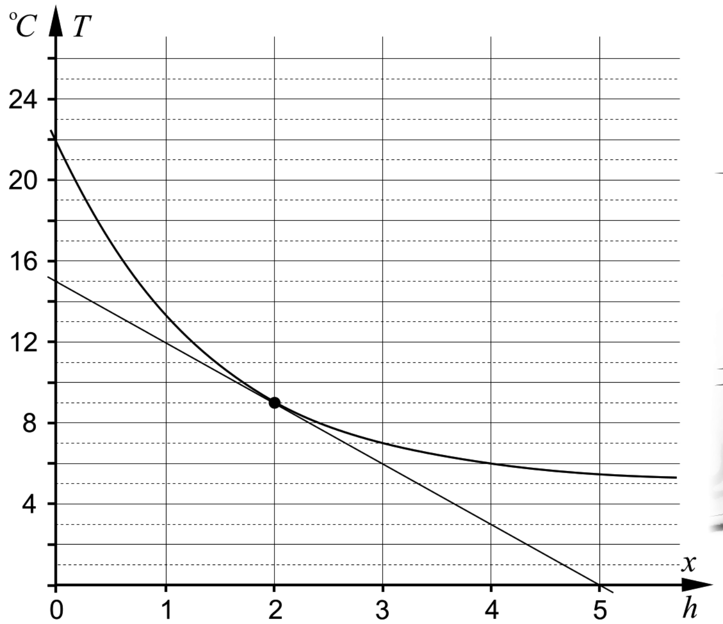
x	0	3	5	6	10
$g'(x)$	–	0	+	0	–

För vilket värde på *x* gäller att $g''(x)=0$? ______________________ (0/0/1)

Delprov C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

12. Beräkna $\int_1^2 6x^2 \mathrm{d}x$ algebraiskt. (2/0/0)

13. En flaska med vatten ställs in i ett kylskåp kl. 12.00. Vattnets temperatur beskrivs av exponentialfunktionen $T(x) = 17\mathrm{e}^{-0,7x} + 5$
där $T(x)$ är vattentemperaturen i $°C$ och x är tiden i timmar efter kl. 12.00.
I figuren visas grafen till funktionen T och tangenten i den punkt där $x = 2$



a) Avläs i figuren och beräkna vattnets genomsnittliga temperaturändring per timme under de första 4 timmarna. (2/0/0)

b) Använd figuren och beräkna tangentens riktningskoefficient. Tolka denna riktningskoefficients betydelse i detta sammanhang. (0/2/0)

c) Kan vattnets temperatur bli $3\,°C$?
Utgå från exponentialfunktionen $T(x) = 17\mathrm{e}^{-0,7x} + 5$ och motivera ditt svar. (1/1/0)

14. För funktionen *f* gäller att $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
Använd derivata för att bestämma koordinaterna för eventuella maximi-, minimi- och terrasspunkter för funktionens graf.

Bestäm också karaktär för respektive punkt, det vill säga om det är en maximi-, minimi- eller terrasspunkt. (3/1/0)

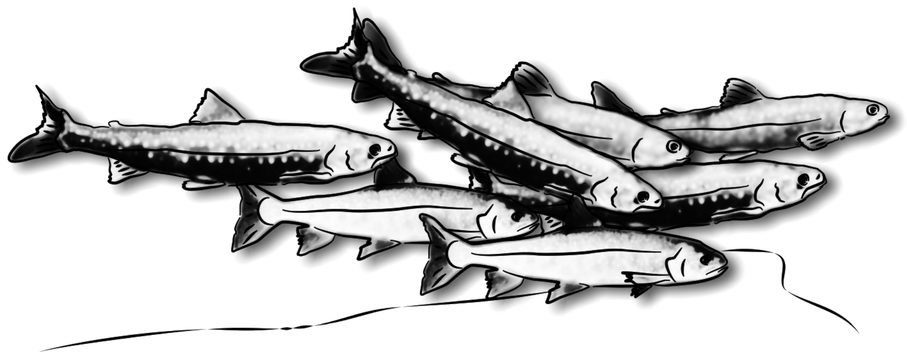
15. Beräkna värdet av uttrycket $\sqrt{4x^2} - |2x|$ för två positiva och två negativa värden på *x*. Formulera sedan en hypotes om uttrycket $\sqrt{4x^2} - |2x|$ baserad på de värden på *x* som du valt. (2/0/0)

16. För en funktion *f* gäller att $f(x) = kx + m$

Undersök vad som ska gälla för *k* och *m* om $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 4$

Motivera dina slutsatser. (0/2/1)

17. I en sjö planterar man in fiskar av en art som inte funnits där tidigare. Fiskpopulationen kan beskrivas med sambandet
$N(t) = \dfrac{15\,000}{3 + 2e^{-0,5 \cdot t}}$ där *N* är antalet fiskar och *t* är tiden i år efter inplanteringen.



a) Bestäm hur många fiskar som planterades in i sjön från början. (0/1/0)

b) På grund av olika miljöfaktorer kan antalet fiskar inte bli hur stort som helst. Bestäm den övre gränsen för antalet fiskar med hjälp av sambandet. (0/0/2)

Delprov D	Uppgift 18–25. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 67 poäng varav 24 E-, 24 C- och 19 A-poäng.

Gräns för provbetyget
E: 17 poäng
D: 26 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 34 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 44 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 53 poäng varav 11 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

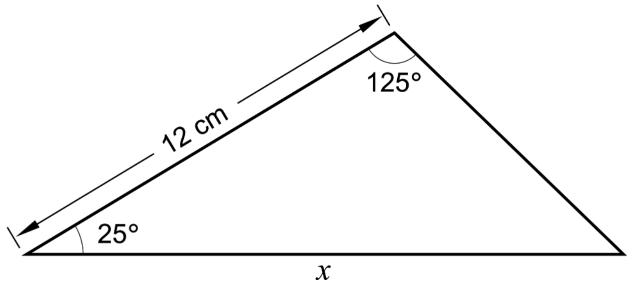
Namn: ____

Födelsedatum: ____

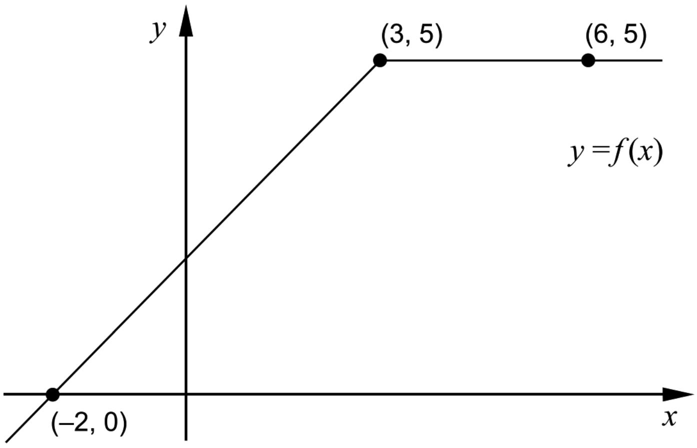
Gymnasieprogram/Komvux: _______________________________

Delprov D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

18. Beräkna längden på sidan x i triangeln. (2/0/0)



19. Figuren visar grafen till en funktion f. Grafen går genom de tre markerade punkterna.



Bestäm $\int_{-2}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x$. (2/0/0)

20. En viss UHD-tv kostar idag 33 700 kr men den minskar snabbt i värde. Värdet av tv:n kan beskrivas med modellen

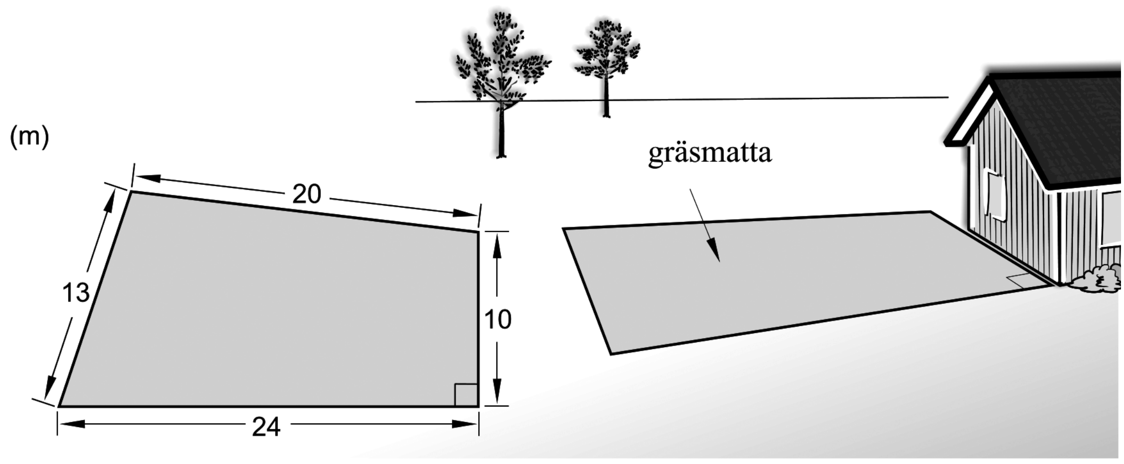
$V(t) = 33\,700\,\mathrm{e}^{-0{,}034 \cdot t}$

där $V(t)$ är värdet av tv:n i kronor och t är tiden i månader efter inköpet.

a) Bestäm hur många månader efter inköpet som tv:n är värd 20 000 kr. (2/0/0)

b) Bestäm vid vilken tidpunkt som värdeminskningen (i kr/mån) är hälften så stor som värdeminskningen vid inköpet. (0/2/0)

21. Ken ska anlägga en gräsmatta på sin tomt. Han mäter sidorna till 13 m, 20 m, 10 m och 24 m. Se figur. En av gräsmattans vinklar är $90°$.



Ken har gräsfrö som räcker till 250 m^2. Avgör om gräsfröna kommer att räcka till hela gräsmattan. (0/4/0)

22. Albins vikt kan beskrivas med funktionen

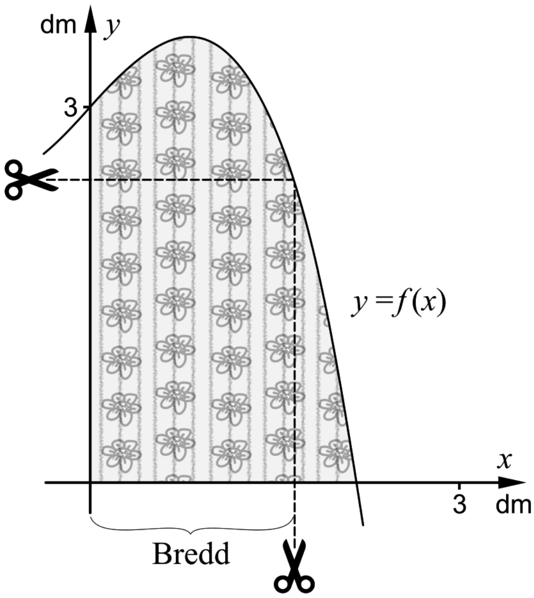
$V(t) = 0{,}10\,t^3 - 1{,}23\,t^2 + 6{,}51\,t + 3{,}72$

där vikten V kg är en funktion av tiden t år efter födseln. Funktionen gäller under hans sex första levnadsår.

Den hastighet som Albins vikt ökar med varierar. Bestäm vilka värden hastigheten kan anta under Albins sex första levnadsår. (0/0/2)

23. För polynomfunktionen f gäller att $f'(x) > 0$ för alla x.
Bestäm antalet reella lösningar till ekvationen $f(x) = 0$ (0/0/2)

24. Sam och Sofia har fått överblivna tygbitar från en möbelfabrik. Tygbitarna har en rundad sida som kan beskrivas med kurvan $y = -0,5x^3 + x + 3$



De tänker klippa både rektangulära och kvadratiska tygservetter och vill att varje tygbit ska räcka till en servett. De tänker använda tygbitarnas raka kanter som sidor i servetterna. Se figur.

Sam och Sofia vill att servetterna ska ha så stor area som möjligt.

a) Bestäm bredden på de *rektangulära* tygservetterna så att arean blir så stor som möjligt. Svara i dm med två decimalers noggrannhet. (0/2/0)

b) Bestäm sidan på de *kvadratiska* tygservetterna så att arean blir så stor som möjligt. Svara i dm med två decimalers noggrannhet. (0/0/3)

25. För funktionen *f* gäller att $f(x) = x^3 + kx^2 + 2,9kx$
där konstanten $k > 0$
Grafen till funktionen har en terrasspunkt för ett visst värde på *k*.

Bestäm detta värde på *k*. (0/0/3)

Till eleven – information inför det muntliga delprovet

Du kommer att få en uppgift som du ska lösa skriftligt och sedan ska du presentera din lösning muntligt. Om du behöver får du ta hjälp av dina klasskamrater, din lärare och ditt läromedel när du löser uppgiften. Din muntliga redovisning börjar med att du presenterar vad uppgiften handlar om och sedan får du beskriva och förklara din lösning. Du ska redovisa alla steg i din lösning. Däremot, om du har gjort samma beräkning flera gånger (till exempel i en värdetabell) så kan det räcka med att du redovisar några av beräkningarna. Din redovisning är tänkt att ta maximalt 5 minuter och ska göras för en mindre grupp klasskamrater och din lärare.

Den uppgift som du får ska i huvudsak lösas för hand, algebraiskt. Det kan hända att du behöver en miniräknare för att göra en del beräkningar men du ska inte hänvisa till grafritande och/eller symbolhanterande funktioner på räknaren (om du har en sådan typ av räknare) när du redovisar din lösning.

Vid bedömningen av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
Din redovisning ska innehålla de delar som behövs för att dina tankar ska gå att följa och förstå. Det du säger bör komma i lämplig ordning och inte innehålla någonting onödigt. Den som lyssnar ska förstå hur beräkningar, beskrivningar, förklaringar och slutsatser hänger ihop med varandra.

Hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
Din redovisning bör innehålla både beskrivningar och förklaringar. Man kan enkelt säga att en beskrivning svarar på frågan *”Hur?”* och en förklaring svarar på frågan *”Varför?”*. Du beskriver något när du till exempel berättar hur du har gjort en beräkning. Du förklarar något när du motiverar varför du till exempel kunde använda en viss formel.

Hur väl du använder den matematiska terminologin
När du redovisar bör du använda ett språk som innehåller matematiska termer, uttryckssätt och symboler som är lämpliga utifrån den uppgift du har löst.

Matematiska termer är ord som till exempel ”exponent”, ”funktion” och ”graf”.
Ett exempel på ett matematiskt uttryckssätt är att x^2 utläses ”x upphöjt till 2” eller ”x i kvadrat”.
Några exempel på matematiska symboler är π och $f(x)$, vilka utläses ”pi” och ”f av x”.

Uppgift 1

Namn: ____________________________

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

1. Grafen till $f(x) = x^4 - 8x^2 + 10$ har tre extrempunkter. Använd derivata för att bestämma koordinater och karaktär för dessa.

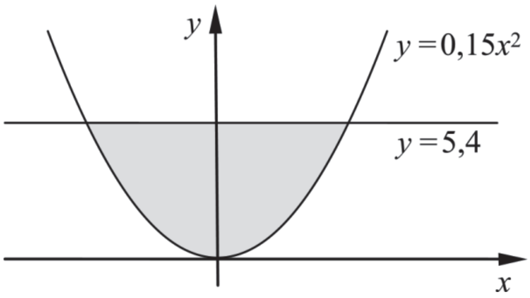
Uppgift 2

Namn:____________________________

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

2. Kurvan $y = 0{,}15x^2$ och linjen $y = 5{,}4$ innesluter ett område som är gråmarkerat i figuren. Beräkna områdets area.



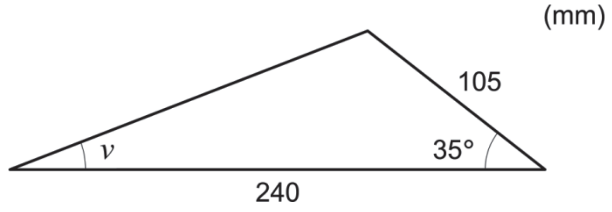
Uppgift 3

Namn:____________________________

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

3. Figuren visar en triangel där två sidor och en vinkel är kända.
Beräkna vinkeln v.



Uppgift 4

Namn:____________________________

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

4. För funktionen f gäller att $f(x) = x^2 + x - 20$
I den punkt där kurvan skär positiva x-axeln har kurvan en tangent.
Beräkna var denna tangent skär y-axeln.

Bedömningsmatris för bedömning av muntlig kommunikativ förmåga

Kommunikativ förmåga	E	C	A	Max
Fullständighet, relevans och struktur Hur fullständig, relevant och strukturerad elevens redovisning är.	Redovisningen kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Det finns en övergripande struktur men redovisningen kan bitvis vara fragmentarisk eller rörig. (1/0/0)		Redovisningen är fullständig och endast relevanta delar ingår. Redovisningen är välstrukturerad. (1/0/1)	(1/0/1)
Beskrivningar och förklaringar Förekomst av och utförlighet i beskrivningar och förklaringar.	Någon förklaring förekommer men tyngdpunkten i redovisningen ligger på beskrivningar. Utförligheten i de beskrivningar och de förklaringar som framförs kan vara begränsad. (1/0/0)		Redovisningen innehåller tillräckligt med utförliga beskrivningar och förklaringar. (1/0/1)	(1/0/1)
Matematisk terminologi Hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse vid enstaka tillfällen i redovisningen. (1/0/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom delar av redovisningen. (1/1/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom hela redovisningen. (1/1/1)	(1/1/1)
Summa				(3/1/3)

Innehållsförteckning

Inledning

Det här häftet ska användas vid bedömningen och betygssättningen av det nationella provet i matematik 3c. Häftet består av 5 kapitel. Inledningsvis finns information om bedömningen och betygssättningen av provet (kapitel 1). Sedan följer anvisningar för att bedöma samtliga skriftliga delprov (kapitel 2). Därefter finns ett kapitel med exempel på bedömda elevlösningar (kapitel 3) och ett kapitel med instruktioner för sammanvägningen till ett provbetyg (kapitel 4). Det avslutande kapitlet innehåller kopieringsunderlag samt hänvisningar till webbmaterial (kapitel 5).

1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 3c

Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsmodeller

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt tre olika modeller. Avvikelser från dessa kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.

Modell 1:

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (…)	+1 E_P

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2:

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med korrekt bestämning av…	+1 E_P
Godtagbar verifiering av…	+1 E_P

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (3/0/0). I detta exempel är den tredje poängen oberoende av den andra poängen. Det indikeras med att den tredje raden inleds med stor bokstav. Det innebär att den tredje poängen kan falla ut även om den andra poängen inte gör det.

Modell 3:

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. … 1 E_R	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. … 1 E_R och 1 C_R	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. … 1 E_R, 1 C_R och 1 A_R

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=,\ \neq,\ <,\ >,\ \leq,\ \geq,\ \approx,\ \pm,\ \sqrt{\ },\ f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ x,\ y,\ (\ ),\ [\ ],\ \int \mathrm{d}x$, bråkstreck, index, lim, VL, HL, symbol för vinkel, gradtecken
Termer	t.ex. absolutbelopp, cirkel, enhetscirkel, polynom, rationellt uttryck, kontinuerlig/diskret funktion, rät linje, andragrads-/polynom-/potens-/exponentialfunktion, funktionsvärde, definitions-/värdemängd, punkt, intervall, område, koordinat, koordinatsystem, graf, kurva, skärningspunkt, nollställe, symmetrilinje, lutning, riktningskoefficient, ändpunkt, sekant, tangent, ändringskvot, förändringshastighet, gränsvärde, derivata, andraderivata, teckenschema, växande/avtagande, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, primitiv funktion, integral, talet e, naturlig logaritm
Hänvisningar	t.ex. till derivatans definition, räta linjens ekvation, tangentens ekvation, cirkelns ekvation, enhetscirkeln, areasatsen, cosinussatsen, sinussatsen, definitionen för sinus
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

2. Bedömningsanvisningar

I det här kapitlet finns anvisningar för hur provet ska bedömas.

Läsanvisning

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om exempel på bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en hänvisning.

Instruktioner för bedömning av delprov B

1.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar $\left(F(x) = \frac{x^3}{3} + 8x + C \right)$	+1 E_P
2.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (2 m/s)	+1 E_B
3.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (B: diskret funktion)	+1 E_B
4.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (C: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$)	+1 E_B
5.		**Max 1/2/0**
a)	Korrekt svar ($f'(x) = 25x^4 + 2x$)	+1 E_P
b)	Korrekt svar $\left(f'(x) = \frac{4e^{4x}}{3} \right)$	+1 C_P
c)	Korrekt svar ($f'(x) = x^{-1,5}$)	+1 C_P

6.		**Max 0/2/0**
	Korrekt svar ($A = -5$)	+1 C_B
	Korrekt svar ($B = 50$)	+1 C_B
7.		**Max 0/1/0**
	Korrekt svar (E)	+1 C_B
8.		**Max 0/2/1**
a)	Korrekt svar $\left(\dfrac{1}{x-5}\right)$	+1 C_P
b)	Korrekt svar ($-17x^4$)	+1 C_P
c)	Korrekt svar ($(A+5)^9 - 1$)	+1 A_P
9.		**Max 0/1/0**
	Korrekt svar $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$	+1 C_B
10.		**Max 0/0/1**
	Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning (1,5)	+1 A_B
11.		**Max 0/0/1**
	Korrekt svar ($x = 4,5$)	+1 A_B

Instruktioner för bedömning av delprov C

12. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, bestämmer korrekt primitiv funktion +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (14) +1 E_P

13. **Max 3/3/0**

a) Godtagbar ansats, tecknar en ändringskvot, t.ex. $\frac{6-22}{4}$ +1 E_B

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($-4\,°C/h$) +1 E_B

b) Godtagbar ansats, beräknar riktningskoefficienten korrekt och påbörjar en tolkning där det framgår att det handlar om en temperaturförändring vid en viss tidpunkt +1 C_B

med i övrigt godtagbar tolkning, inklusive korrekt enhet och tidpunkt, där det även framgår att temperaturen minskar +1 C_M

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

c)

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang som leder till slutsatsen att temperaturen inte kan bli $3\,°C$. Resonemanget inkluderar ett *påstående* om att ekvationen $3 = 17e^{-0,7x} + 5$ inte går att lösa *eller* den lägsta temperaturen är $5\,°C$. 1 E_R	Godtagbart välgrundat resonemang som leder till slutsatsen att temperaturen inte kan bli $3\,°C$. Resonemanget inkluderar en *motivering* till varför ekvationen $3 = 17e^{-0,7x} + 5$ inte går att lösa *eller* den lägsta temperaturen är $5\,°C$. 1 E_R och 1 C_R	

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

14. **Max 3/1/0**

Godtagbar ansats, bestämmer derivatans nollställen, $x_1 = 1,\ x_2 = 3$ +1 E_P

med korrekt bestämning av extrempunkternas koordinater, $(1,\ 4)$ och $(3,\ 0)$ +1 E_P

Godtagbar verifiering av extrempunkternas karaktär
(maximipunkt $(1,\ 4)$ och minimipunkt $(3,\ 0)$) +1 E_P

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 C_K

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

15. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, bestämmer uttryckets värde korrekt för två positiva och två negativa värden på *x* +1 E_B

Godtagbar relevant hypotes som baseras på genomförda beräkningar, t.ex. ”Det blir noll.” +1 E_R

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

16. **Max 0/2/1**

Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer korrekt primitiv funktion,
$F(x) = \frac{kx^2}{2} + mx$ + 1 C_P

Godtagbar välgrundad slutsats om värdet på *m* + 1 C_R

Godtagbar välgrundad och nyanserad slutsats om värdet på *k* + 1 A_R

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

17. **Max 0/1/2**

a) Godtagbar lösning med korrekt svar (3000) +1 C_M

b) Godtagbar lösning med korrekt svar (5000) +1 A_M

med insikt om att ett gränsvärde söks och med formellt korrekt bestämning av detta gränsvärde +1 A_B

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

Instruktioner för bedömning av delprov D

18. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $\dfrac{x}{\sin 125°} = \dfrac{12}{\sin 30°}$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (20 cm) +1 E_{PL}

19. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, tecknar ett uttryck som motsvarar en del av eller hela integralens värde, t.ex. $3 \cdot 5$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (27,5) +1 E_{PL}

Kommentar: Även svaret 27,5 a.e. anses godtagbart i denna uppgift.

20. **Max 2/2/0**

a) Godtagbar ansats, t.ex. ställer upp ekvationen $33\,700\,\mathrm{e}^{-0{,}034 \cdot t} = 20\,000$ +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (15 månader) +1 E_M

b) Godtagbar ansats, t.ex. deriverar $V(t)$ och beräknar $V'(0)$ +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (20 månader) +1 C_M

Kommentar: En lösning i b)-uppgiften som utan kommentar eller förklaring utgår från ekvationen $33\,700\,\mathrm{e}^{-0{,}034 \cdot t} = \dfrac{33700}{2}$ ges noll poäng.

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

21. **Max 0/4/0**

Godtagbar ansats, t.ex. beräknar hypotenusans längd i den rätvinkliga triangeln, 26 m + 1 C_{PL}

med godtagbar fortsättning, t.ex. beräknar en användbar vinkel med cosinussatsen +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (”Ja, arean blir 247 m^2 så gräsfröna räcker.”) +1 C_{PL}

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 C_K

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

22. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, visar insikt om att funktionens derivata ska undersökas, t.ex. genom att använda att $V''(t)=0$ och teckna ekvationen $0,6t-2,46=0$ +1 A_M

med i övrigt godtagbar lösning, där $V'(4,1)$, $V'(0)$ och $V'(6)$ undersöks, med godtagbart svar (”Mellan 1,5 kg/år och 6,5 kg/år.”) +1 A_M

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

23. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, inleder ett välgrundat generellt och nyanserat resonemang genom att konstatera att positiv derivata innebär att funktionen är (strängt) växande +1 A_R

med godtagbart slutfört resonemang med korrekt slutsats (En reell lösning) +1 A_R

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

24. **Max 0/2/3**

a) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar areafunktionen $A(x)=x(-0,5x^3+x+3)$ +1 C_M

med godtagbar grafisk/numerisk bestämning av sidlängden inklusive verifiering av maximum (1,43 dm) +1 C_M

b) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $-0,5x^3+x+3=x$ +1 A_M

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (1,82 dm) +1 A_M

Lösningen (till deluppgift a och b) kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 A_K

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

25. **Max 0/0/3**

Godtagbar ansats, t.ex. sätter diskriminanten lika med noll i ekvationen $f'(x)=0$ *eller* tecknar ekvationssystemet $\begin{cases} f'(x)=0 \\ f''(x)=0 \end{cases}$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($k=8,7$) +1 A_{PL}

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 A_K

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

3. Exempel på bedömda elevlösningar

Uppgift 13b

Elevlösningsexempel 13b.1 (0 poäng)

$k = \frac{6-0}{3-5} = -3$ vilket betyder att under andra timmen minskar temperaturen med 3°C i timmen

Bedömningskommentar till exemplet: Tolkningen motsvarar en ändringskvot och inte en derivata. Elevlösningen ges noll poäng.

Elevlösningsexempel 13b.2 (1 C_B)

riktningskoeff $k = \frac{-15}{5} = -3°C$ Då det gått 2 timmar minskar temperaturen med 3°C

Bedömningskommentar till exemplet: Det framgår att det rör sig om en temperaturförändring vid en viss tidpunkt vilket ger en begreppspoäng på C-nivå. Däremot är inte tolkningen korrekt eftersom temperaturändringen anges med fel enhet.

Elevlösningsexempel 13b.3 (1 C_B och 1 C_M)

tangentens $k = \frac{12-3}{1-4} = -\frac{9}{3} = -3$

När två timmar gått så minskar temperaturen med −3°C per timme!

Bedömningskommentar till exemplet: Det framgår att det rör sig om en temperaturförändring vid en viss tidpunkt vilket ger en begreppspoäng på C-nivå. Tolkningen är dock inte helt korrekt eftersom ordet ”minskar” används samtidigt med det negativa uttrycket ”$-3\ °C$ per timme”. Sammantaget bedöms elevlösningen uppfylla kraven för en begreppspoäng på C-nivå samt nätt och jämnt kraven för en modelleringspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 13b.4 (1 C_B och 1 C_M)

(1,12) och (4,3) Då klockan är 14 ändras

$k = \frac{3-12}{4-1} = \frac{-9}{3} = -3$ den med $-3°/h$

Bedömningskommentar till exemplet: Det framgår att det rör sig om en minskning eftersom ändringen anges som negativ, ” $-3°/h$ ”. Enheten är inte angiven i Celsius och det framgår inte tydligt att det rör sig om en temperaturförändring eftersom ordet ”den” används istället för temperaturen. Sammantaget bedöms elevlösningen uppfylla kraven för en begreppspoäng på C-nivå samt nätt och jämnt kraven för en modelleringspoäng på C-nivå.

Uppgift 13c

Elevlösningsexempel 13c.1 (0 poäng)

$17e^{-0,7x} + 5 = 3$

$17e^{-0,7x} = -2$

$e^{-0,7x} = -2/17$

$-0,7x = \ln -2/17$

$x = \ln -2/17/-0,7$

Ja, när x är detta är temperaturen 3°

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen leder till en felaktig slutsats och ges därmed noll poäng.

Elevlösningsexempel 13c.2 (1 E_R)

$T(x) = 17e^{-0,7x} + 5$

Nej, tempen kan inte bli 3 grader för den lägsta är 5°. Det syns i formeln.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen leder till en godtagbar slutsats och baseras på påståendet att det ”syns i formeln” att ”den lägsta är $5\,°C$ ”. Elevlösningen ges en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 13c.3 (1 E_R och 1 C_R)

$$3 = 17e^{-0,7x} + 5$$

$$-2 = 17e^{-0,7x}$$

negativ alltid positiv

svaret är nej!

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen leder till en godtagbar slutsats och baseras på en välgrundad motivering. Elevlösningen ges båda resonemangspoängen.

Elevlösningsexempel 13c.4 (1 E_R och 1 C_R)

$$T(x) = 17e^{-0,7x} + 5$$

När x-et går mot stora tal kommer T att bli 5° så T kan inte va 3°

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen leder till en godtagbar slutsats och baseras på en välgrundad motivering (även om den inte är helt formellt korrekt). Elevlösningen ges båda resonemangspoängen.

Uppgift 14

Elevlösningsexempel 14.1 (2 E_P och 1 C_K)

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$0 = 3x^2 - 12x + 9$

$0 = x^2 - 4x + 3$

$x = \frac{4}{2} \pm \sqrt{2^2 - 3} = 2 \pm 1$

$x_1 = 3$ och $x_2 = 1$

$f''(x) = 6x - 12$

$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 18 - 12 = 6 \Rightarrow$ Maximipunkt

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = 6 - 12 = -6 \Rightarrow$ Minimipunkt

$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0$ och $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4$

Koordinaterna är $(3,0)$ och $(1,4)$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen är korrekt när det gäller derivatans nollställen och extrempunkternas koordinater. Eftersom slutsatserna av verifieringen är felaktiga uppfylls inte kraven för den tredje procedurpoängen på E-nivå. När det gäller kommunikation bedöms uppgiften vara behandlad i sin helhet och i huvudsak korrekt. Kraven för kommunikation på C-nivå anses vara uppfyllda trots att ett sammanfattat svar saknas. Sammantaget ges elevlösningen de två första procedurpoängen på E-nivå samt kommunikationspoängen på C-nivå.

Elevlösningsexempel 14.2 (3 E_P och 1 C_K)

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$x = 2 \pm \sqrt{2^2} - 3$

$x_1 = 2 + 1 = 3$

$x_2 = 2 - 1 = 1$

x	0	1	2	3	4
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	MAX	↘	MIN	↗

$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0$

$f(1) \quad 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4$

SVAR: (1,4) är en maxpkt & (3,0) är en minpkt

Bedömningskommentar till exemplet: Uppgiften är löst i sin helhet inklusive verifiering av extrempunkter. När det gäller kommunikation är lösningen strukturerad och möjlig att följa och förstå trots att det felaktiga skrivsättet ” $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$ ” används, att rottecknet inte omfattar hela uttrycket och att de beräkningar som ligger bakom teckenschemat inte redovisas. Elevlösningen ges tre procedurpoäng på E-nivå samt nätt och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 15

Elevlösningsexempel 15.1 (1 E_R)

$\sqrt{4x^2} - |2x|$

$x = 5 \quad \sqrt{4 \cdot 5^2} - |2 \cdot 5| = 10 - 10 = 0$

$x = -5 \quad \sqrt{4 \cdot (-5)^2} - |2 \cdot (-5)| = 10 + 10 = 20$

$x = 1 \quad \sqrt{4 \cdot 1^2} - |2 \cdot 1| = 2 - 2 = 0$

$x = -1 \quad \sqrt{4 \cdot (-1)^2} - |2 \cdot (-1)| = 2 + 2 = 4$

Alltså, om x är positivt blir det 0. Om x är negativt blir det 4 gånger så stort fast positivt

Bedömningskommentar till exemplet: Utifrån felaktiga beräkningar med negativa tal formuleras en godtagbar hypotes. Elevlösningen ges nätt och jämnt resonemangspoängen på E-nivå.

Elevlösningsexempel 15.2 (1 E_B och 1 E_R)

x-värden 1, 2, −1, −2

$\sqrt{4\cdot 1^2} - |2\cdot 1| = 2-2=0$ Hypotes: $\sqrt{4x^2} - |2x| = 2x-2x=0$

$\sqrt{4\cdot 2^2} - |2\cdot 2| = 4-4=0$ Differensen blir alltid

$\sqrt{4\cdot(-2)^2} - |2\cdot(-2)| = 4-4=0$ noll eftersom $\sqrt{4x^2} = |2x|$

$\sqrt{4\cdot(-1)^2} - |2\cdot(-1)| = 2-2=0$ oavsett värde på x.

Bedömningskommentar till exemplet: Beräkningarna är korrekt utförda och en korrekt hypotes formuleras, men den generella härledningen är felaktig eftersom $|2x| = 2x$ och $\sqrt{4x^2} = 2x$ inte gäller för negativa värden på x. Trots detta anses kraven för resonemangspoängen vara uppfyllda eftersom en generell härledning inte efterfrågas. Sammantaget ges elevlösningen en begrepps- och en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 15.3 (1 E_B och 1 E_R)

$\sqrt{4x^2} - |2x|$

$x=3$ $\sqrt{4\cdot 3^2} - |2\cdot 3| = 6-6=0$

$x=-3$ $\sqrt{4\cdot -3^2} - |2\cdot -3| = 6-6=0$ Det blir noll!

$x=10$ $\sqrt{4\cdot 10^2} - |2\cdot 10| = 20-20=0$

$x=-10$ $\sqrt{4\cdot -10^2} - |2\cdot -10| = 20-20=0$

Bedömningskommentar till exemplet: Parentes saknas kring de negativa talen under rottecknen men beräkningarna är utförda som om parenteser var utsatta. Hypotesen är korrekt. Elevlösningen ges nätt och jämnt en begrepps- och en resonemangspoäng på E-nivå.

Uppgift 16

Elevlösningsexempel 16.1 (1 C_P och 1 C_R)

$f(x) = kx + m$

$\int_{-2}^{2} (kx + m)\,dx = \left[\frac{kx^2}{2} + mx \right]_{-2}^{2} = \frac{k \cdot 2^2}{2} + m \cdot 2 - \left(\frac{k \cdot (-2)^2}{2} - 2m \right) =$

$= 2k + 2m - 2k + 2m = 4m = 4 \quad , \quad m = 1$

$k = 2 \qquad \int_{-2}^{2} (2x + 1)\,dx = \left[\frac{2x^2}{2} + x \right]_{-2}^{2} = 4 + 2 - (4 - 2) = 4$

$k = -5 \qquad \int_{-2}^{2} (-5x + 1)\,dx = \left[-5\frac{x^2}{2} + x \right]_{-2}^{2} = -5 \cdot 2 + 2 - (-5 \cdot 2 - 2) = 4$

$k = 0 \qquad \int_{-2}^{2} 1\,dx = \left[x \right]_{-2}^{2} = 2 - (-2 = 4$

Alltså $m = 1$ och k kan vara allt möjligt!

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen ger en välgrundad motivering till varför $m = 1$ men ingen välgrundad motivering till varför k kan anta alla värden, eftersom endast specialfall undersöks. Elevlösningen ges en procedur- och en resonemangspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 16.2 (1 C_P och 1 C_R)

$f(x) = kx + m$

$\int_{-2}^{2} (kx + m)\,dx = \left[\frac{kx^2}{2} + mx \right]_{-2}^{2} = 2k + 2m - (2k - 2m) = 4m = 4$

SVAR: $m = 1$ och k kan vara vad som helst!

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen ger en välgrundad motivering till varför $m = 1$ men ingen motivering till varför k kan anta alla värden. Elevlösningen ges en procedur- och en resonemangspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 16.3 (1 C_P, 1 C_R och 1 A_R)

$f(x)=kx+m$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2}(kx+m)\,dx = \left[0{,}5kx^2+mx\right]_{-2}^{2} =$$

$$= F(2)-F(-2) = (0{,}5k\cdot 4+2m)-(0{,}5k\cdot 4-2m)=$$

$$= 2k+2m-2k+2m = 2m+2m = 4m$$

$4m=4$

$m=1$

Eftersom k kan förenklas bort i integralen, kan k anta alla värden och m måste vara 1.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar korrekta välgrundade slutsatser om k och m.

Uppgift 17b

Elevlösningsexempel 17b.1 (1 A_M)

$$N(t)=\frac{15000}{3+2e^{-0{,}5t}}$$

Om t blir stort kommer $2e^{-0{,}5t}$ att bli noll. Då blir fiskantalet $\frac{15000}{3+0}=\boxed{5000}$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar att den övre gränsen är 5000 fiskar, vilket uppfyller kraven för modelleringspoängen på A-nivå. Lösningen är dock inte formellt korrekt vid gränsvärdesbestämningen, eftersom det inte framgår att $e^{-0{,}5t}$ *går mot* noll då t *går mot* oändligheten. Lösningen uppfyller därmed inte kraven för begreppspoängen på A-nivå.

Elevlösningsexempel 17b.2 (1 A_M och 1 A_B)

$N(t) = \frac{15000}{3+2e^{-0,5t}}$

Då $t \to \infty$ kommer nämnaren att $\to 3$

$\frac{15000}{3} = 5000$ SVAR 5000 fiskar

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen framgår att ett gränsvärde söks och bestämningen av detta är formellt korrekt även om lösningen är kortfattad. Elevlösningen ges både modelleringspoängen samt nätt och jämnt begreppspoängen på A-nivå.

Uppgift 20

Elevlösningsexempel 20.1 (2 E_M)

a) $V(t) = 33700e^{-0,034t}$

$20000 = 33700e^{-0,034t}$

$\frac{20000}{33700} = e^{-0,034t}$

$\ln\left(\frac{20000}{33700}\right) = -0,034t$

$t \approx \frac{\ln\left(\frac{20000}{33700}\right)}{-0,034}$

$t \approx 15$

SVAR: 15 mån efter inköpet

b) $\frac{33700}{2} = 33700e^{-0,034t}$

$0,5 = e^{-0,034t}$

$\ln 0,5 = -0,034t$

$t = \frac{\ln 0,5}{-0,034}$

$t \approx 20$

SVAR: 20 mån efter inköpet

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en korrekt löst a)-uppgift vilket ger två modelleringspoäng på E-nivå. I b)-uppgiften ges ingen kommentar om varför den tecknade ekvationen kan ge ett korrekt svar, vilket ger noll poäng. Sammantaget ges lösningen två modelleringspoäng på E-nivå.

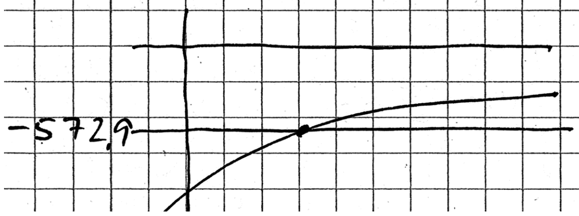
Elevlösningsexempel 20.2 (2 E_M och 2 C_M)

a) $33700e^{-0{,}034t} = 20000$

Intersect $\underline{t = 15{,}3 \text{ mån}}$

b) $V'(t) = -1145{,}8e^{-0{,}034t}$

$V'(0) = -1145{,}8$ $\quad$ $V'(0)/2 = -572{,}9$

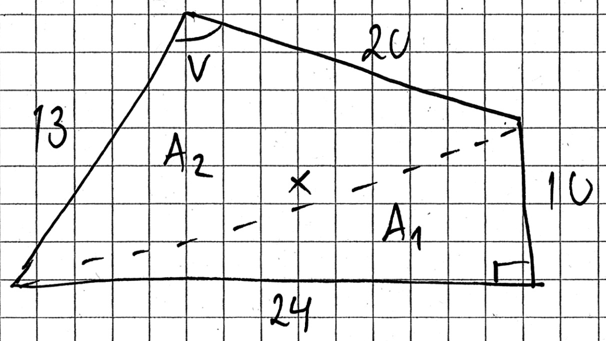


Intersect $\underline{t = 20{,}4 \text{ mån}}$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en knapphändig men godtagbar lösning till de båda deluppgifterna där digitala hjälpmedel använts. Trots lösningens knapphändighet anses den nätt och jämnt uppfylla kraven för två modelleringspoäng på E-nivå och två modelleringspoäng på C-nivå.

Uppgift 21

Elevlösningsexempel 21.1 (3 C_{PL} och 1 C_K)



$x^2 = 10^2 + 24^2$

$x^2 = 676$

$x = 26$ m

250 m^2 frön

$A_1 = \frac{10 \cdot 24}{2} = 120\ m^2$

$A_2 \quad x^2 = 26^2 = 13^2 + 20^2 - 2 \cdot 13 \cdot 20 \cdot \cos V$

$\cos V = \frac{26^2 - 13^2 - 20^2}{-2 \cdot 13 \cdot 20}$

$V = 101{,}87°$

$A_2 = \frac{13 \cdot 20 \cdot \sin 101{,}87°}{2} = 127\ m^2$

Arean $= 120 + 127 = 247\ m^2$ Fröna räcker!

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen är korrekt och ges tre problemlösningspoäng på C-nivå. När det gäller kommunikationen redovisas en tydlig figur och alla relevanta beräkningar. Användningen av symboler, index och enheter bedöms vara i huvudsak korrekt. Enheter saknas på något ställe och ± saknas i samband med ekvationslösningen i början. Hänvisning till Pythagoras sats, areasatsen och cosinussatsen saknas. Sammantaget bedöms lösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 22

Elevlösningsexempel 22.1 (1 A_M)

$V(t) = 0,10t^3 - 1,23t^2 + 6,51t + 3,72$

$V'(t) = 0,30t^2 - 2,46t + 6,51$

t	$V'(t)$
0	$= 0,30 \cdot 0^2 - 2,46 \cdot 0 + 6,51 \approx 6,51$
1	$= 0,30 \cdot 1^2 - 2,46 \cdot 1 + 6,51 \approx 4,35$
2	$= 0,30 \cdot 2^2 - 2,46 \cdot 2 + 6,51 \approx 2,79$
3	$= 0,30 \cdot 3^2 - 2,46 \cdot 3 + 6,51 \approx 1,83$
4	$= 0,30 \cdot 4^2 - 2,46 \cdot 4 + 6,51 \approx 1,47$
5	$= 0,30 \cdot 5^2 - 2,46 \cdot 5 + 6,51 \approx 1,71$
6	$= 0,30 \cdot 6^2 - 2,46 \cdot 6 + 6,51 \approx 2,55$

Viktens ändringshastighet kan vara

$1,47 \leq V'(t) \leq 6,51$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar insikt om att derivatans största och minsta värde ska undersökas. Lösningen visar hur ett närliggande värde till derivatans nollställe, $x = 4$, erhålls med hjälp av heltalsprövning. Denna prövning styrker dock inte att det endast finns ett nollställe till derivatan i det aktuella intervallet och inte heller att ett nollställe verkligen hittats. Därmed finns ingen grund för slutsatsen $1,47 \leq V'(t) \leq 6,51$*. Sammantaget ges elevlösningen första modelleringspoängen på A-nivå.

* Däremot, om prövningen varit mer systematisk kring $x = 4$, minimum då $x = 4,1$ styrkts genom diskussion om symmetriegenskaper hos andragradsfunktionen V' och lösningen i övrigt varit godtagbar skulle två modelleringspoäng på A-nivå kunna erhållas.

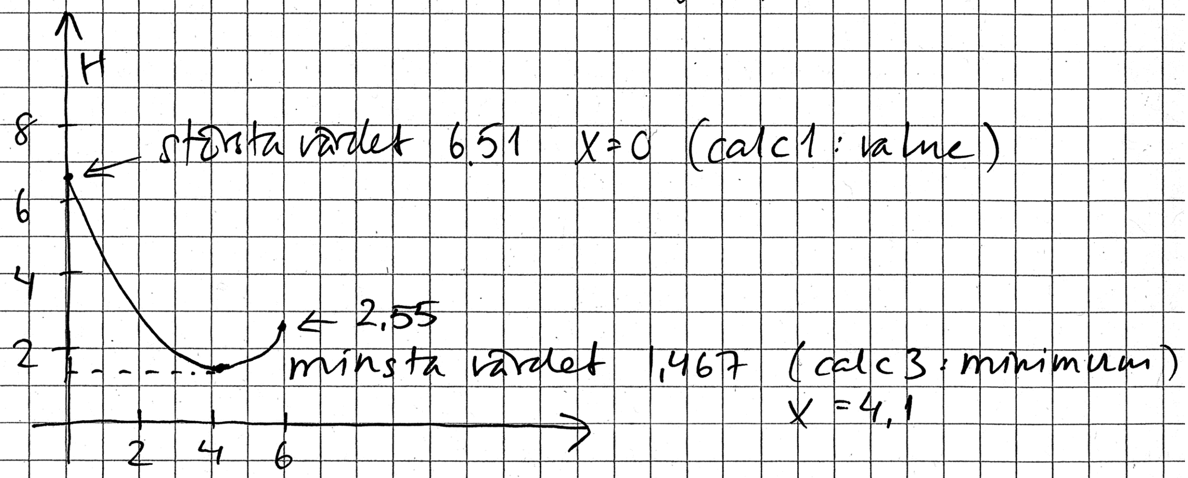
Elevlösningsexempel 22.2 (2 A_M)

$V(t) = 0{,}10t^3 - 1{,}23t^2 + 6{,}51t + 3{,}72$

Hastigheten på vikten är

$H(t) = 0{,}30t^2 - 2{,}46t + 6{,}51$

På räknaren ritar jag grafen $H(t)$



Hastigheten på vikten varierar mellan 1,467 kg/år och 6,51 kg/år

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas hur ändringshastigheten undersöks på grafräknaren. Grafen är begränsad till det aktuella intervallet och visar insikt om vilka tre värden som ska undersökas. Det största och minsta värdet har bestämts med hjälp av grafräknaren. Funktionsvärdet 2,55 är inte nödvändigt att bestämma då figuren tydligt visar det största och minsta värdet inom det aktuella intervallet. Elevlösningen ges två modellringspoäng på A-nivå.

Uppgift 23

Elevlösningsexempel 23.1 (0 poäng)

Om $f(x) = 2x + 4$ är $f'(x) = 2$ dvs > 0 för alla x

$2x + 4 = 0$

$x = -2$

alltså finns bara en reell lösning då $f'(x) > 0$

Bedömningskommentar till exemplet: Eftersom slutsatsen baseras på ett specialfall och inte en generell behandling ges elevlösningen noll poäng.

Elevlösningsexempel 23.2 (1 A_R)

Om grafen aldrig har negativ lutning ($= f'(x) > 0$) så kan den bara skära x-axeln ($f(x) = 0$) max en gång, eftersom efter den skurit x-axeln så kommer värdet bara att öka (grafen går uppåt).

Bedömningskommentar till exemplet: Av elevlösningen framgår att positiv derivata innebär att funktionen är växande. Däremot påstås att grafen skär x-axeln ”max en gång”, vilket är felaktigt, och det framgår inte tydligt att ekvationen $f(x) = 0$ har en reell lösning. Sammantaget anses elevlösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för den första resonemangspoängen på A-nivå.

Elevlösningsexempel 23.3 (2 A_R)

$f'(x) > 0$ för alla x

$\downarrow$

Om $f'(x) > 0$ så är $f(x)$ bara växande.

$\Rightarrow$ Alltså inga max- eller minpunkter.

Ingen terrasspunkt heller. Då finns det en reell lösning för $f(x) = 0$ och det är där funktionen skär x-axeln.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen ges ett resonemang som leder fram till den korrekta slutsatsen att ekvationen har en reell lösning. Informationen ”Alltså inga max- eller minpunker. Ingen terrasspunkt heller.” är inte nödvändig för att resonemanget ska anses vara fullständigt men tydliggör resonemanget. Lösningen bedöms uppfylla kraven för två resonemangspoäng på A-nivå.

Uppgift 24

Elevlösningsexempel 24.1 (1 C_M och 2 A_M)

a) $A = x \cdot y = x(-0{,}5x^3 + x + 3)$ där x är bredden

$A = -0.5x^4 + x^2 + 3x$

$A' = -2x^3 + 2x + 3$ $\quad A' = 0$

$0 = -2x^3 + 2x + 3$ Miniräknarens Equation

$x = 1{,}431.. \approx 1{,}43$

b) $A = x^2$ $\quad 2{,}179 > x > 0$

$x = y$

$x = -0{,}5x^3 + x + 3$

$0 = -0.5x^3 + 3$

$x \approx 1{,}817$

Bedömningskommentar till exemplet: Lösningen till deluppgift a) är godtagbar förutom att verifiering av maximum saknas och därmed ges den första modelleringspoängen på C-nivå men inte den andra. Lösningen till deluppgift b) är korrekt vilket ger två modelleringspoäng på A-nivå. Eftersom verifieringen saknas i deluppgift a) anses inte uppgiften vara löst i sin helhet och därmed bedöms inte kommunikation. Sammantaget ges elevlösningen en modelleringspoäng på C-nivå och två modelleringspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 24.2 (2 C_M, 2 A_M och 1 A_K)

(a) Arean för servetterna blir xy

$y = -0.5x^3 + x + 3$

ins y i xy ger det

$x(-0.5x^3 + x + 3) = A$

$A = -0.5x^4 + x^2 + 3x$

Extrempunkterna är då $f'(x) = 0$

$f'(x) = 2x - 2x^3 + 3$

$0 = 2x - 2x^3 + 3$

Equation ger mig $x = 1{,}431$

Jag ritar upp $f'(x)$ på räknaren och ser att derivatan är negativ då $x = 1{,}43$, dvs. max!

SVAR: Bredden är 1,43 dm

(b) Om servetterna ska vara kvadratiska innebär det att $y = x$ vilket ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} y = x \\ y = -0.5x^3 + x + 3 \end{cases}$$

$x = -0.5x^3 + x + 3$

$0 = -0.5x^3 + 3$

$x = \sqrt[3]{6}$

SVAR: Bredden är $\sqrt[3]{6}$ dm

Bedömningskommentar till exemplet: Lösningen till deluppgift a) och b) är korrekta och ges därmed två modelleringspoäng på C-nivå och två modelleringspoäng på A-nivå. När det gäller kommunikation anses lösningen vara lätt att följa och förstå förutom att variabeln *x* inte är definierad och att det inte tydligt framgår hur verifiering av maximum utförts på räknaren. I deluppgift b) anges svaret i exakt form vilket bedöms som godtagbart. Sammantaget anses elevlösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för kommunikationspoängen på A-nivå.

Uppgift 25

Elevlösningsexempel 25.1 (2 A_{PL})

$f(x) = x^3 + kx^2 + 2{,}9kx$

$f'(x) = 3x^2 + 2kx + 2{,}9k$

$f''(x) = 6x + 2k$

(2) $6x + 2k = 0$

$k = -3x$

sätt in i (1)

$$\begin{cases} 3x^2 + 2kx + 2{,}9k = 0 & (1) \\ 6x + 2k = 0 & (2) \end{cases}$$

$3x^2 + 2 \cdot -3x \cdot x + 2{,}9 \cdot -3x = 0$

$3x^2 - 6x^2 - 8{,}7x = 0$

$-3x^2 - 8{,}7x = 0$

$x^2 + 2{,}9x = 0$

$x = -\frac{2{,}9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2{,}9}{2}\right)^2} = -\frac{2{,}9}{2} \pm \frac{2{,}9}{2}$

$x_1 = 0 \rightarrow k_1 = -3 \cdot 0 = 0$

$x_2 = -2{,}9 \rightarrow k_2 = -3 \cdot -2{,}9 = 8{,}7$

$k > 0$ bortse från ena roten SVAR: $k = 8{,}7$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen tecknas ett korrekt ekvationssystem som mynnar ut i ett korrekt svar. Därmed ges två problemlösningspoäng på A-nivå. När det gäller kommunikation är elevlösningen inte helt lätt att följa och förstå i inledningen eftersom det inte framgår varför andraderivatan sätts till noll. Parenteser runt negativa tal saknas. Därmed anses inte kraven för kommunikationspoängen på A-nivå vara uppfyllda.

Elevlösningsexempel 25.2 (1 A_{PL} och 1 A_K)

$f(x) = x^3 + kx^2 + 2{,}9kx$

$f'(x) = 3x^2 + 2kx + 2{,}9k$

$3x^2 + 2kx + 2{,}9k = 0$

$x^2 + \frac{2}{3}kx + \frac{2{,}9k}{3} = 0$

$x = -\frac{k}{3} \pm \sqrt{\left(-\frac{k}{3}\right)^2 - \frac{2{,}9k}{3}}$

Vid en terrasspunkt har $f'(x)$ bara ett nollställe. Eftersom det bara ska finnas ett nollställe är

$\sqrt{\left(-\frac{k}{3}\right)^2 - \frac{2{,}9k}{3}} = 0$

$\frac{k^2}{9} = \frac{2{,}9k}{3}$

$k = 3 \cdot 2{,}9 = 8{,}7$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen tecknas ekvationen $f'(x) = 0$ och diskriminanten sätts lika med noll. Lösningen av andragradsekvationen är felaktig då endast en lösning presenteras utan att det förklaras varför. Därmed uppfylls inte kraven för den andra problemlösningspoängen på A-nivå. När det gäller kommunikation anses uppgiften vara löst i sin helhet (trots den felaktiga ekvationslösningen) och är i övrigt lätt att följa och förstå eftersom det framgår varför diskriminanten sätts lika med noll. Lösningen är välstrukturerad och innehåller korrekt använda symboler. Kraven för kommunikationspoängen på A-nivå anses därmed vara uppfyllda.