Instruktioner för bedömning av delprov D

18. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $\frac{x}{\sin 125°} = \frac{12}{\sin 30°}$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (20 cm) +1 E_{PL}

19. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, tecknar ett uttryck som motsvarar en del av eller hela integralens värde, t.ex. $3 \cdot 5$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (27,5) +1 E_{PL}

Kommentar: Även svaret 27,5 a.e. anses godtagbart i denna uppgift.

20. **Max 2/2/0**

a) Godtagbar ansats, t.ex. ställer upp ekvationen $33\,700\, e^{-0{,}034 \cdot t} = 20\,000$ +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (15 månader) +1 E_M

b) Godtagbar ansats, t.ex. deriverar $V(t)$ och beräknar $V'(0)$ +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (20 månader) +1 C_M

Kommentar: En lösning i b)-uppgiften som utan kommentar eller förklaring utgår från ekvationen $33\,700\, e^{-0{,}034 \cdot t} = \frac{33700}{2}$ ges noll poäng.

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

21. **Max 0/4/0**

Godtagbar ansats, t.ex. beräknar hypotenusans längd i den rätvinkliga triangeln, 26 m + 1 C_{PL}

med godtagbar fortsättning, t.ex. beräknar en användbar vinkel med cosinussatsen +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ("Ja, arean blir 247 m^2 så gräsfröna räcker.") +1 C_{PL}

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 C_K

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

22. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, visar insikt om att funktionens derivata ska undersökas, t.ex. genom att använda att $V''(t)=0$ och teckna ekvationen $0,6t-2,46=0$ +1 A_M

med i övrigt godtagbar lösning, där $V'(4,1)$, $V'(0)$ och $V'(6)$ undersöks, med godtagbart svar (”Mellan 1,5 kg/år och 6,5 kg/år.”) +1 A_M

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

23. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, inleder ett välgrundat generellt och nyanserat resonemang genom att konstatera att positiv derivata innebär att funktionen är (strängt) växande +1 A_R

med godtagbart slutfört resonemang med korrekt slutsats (En reell lösning) +1 A_R

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

24. **Max 0/2/3**

a) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar areafunktionen $A(x)=x(-0,5x^3+x+3)$ +1 C_M

med godtagbar grafisk/numerisk bestämning av sidlängden inklusive verifiering av maximum (1,43 dm) +1 C_M

b) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $-0,5x^3+x+3=x$ +1 A_M

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (1,82 dm) +1 A_M

Lösningen (till deluppgift a och b) kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 A_K

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

25. **Max 0/0/3**

Godtagbar ansats, t.ex. sätter diskriminanten lika med noll i ekvationen $f'(x)=0$ *eller* tecknar ekvationssystemet $\begin{cases} f'(x)=0 \\ f''(x)=0 \end{cases}$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($k=8,7$) +1 A_{PL}

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 A_K

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

Elevlösningsexempel 17b.2 (1 A_M och 1 A_B)

$$N(t) = \frac{15000}{3+2e^{-0,5t}}$$

Då $t \to \infty$ kommer nämnaren att $\to 3$

$$\frac{15000}{3} = 5000$$

SVAR 5000 fiskar

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen framgår att ett gränsvärde söks och bestämningen av detta är formellt korrekt även om lösningen är kortfattad. Elevlösningen ges både modelleringspoängen samt nätt och jämnt begreppspoängen på A-nivå.

Uppgift 20

Elevlösningsexempel 20.1 (2 E_M)

a) $V(t) = 33700e^{-0,034t}$

$$20000 = 33700e^{-0,034t}$$

$$\frac{20000}{33700} = e^{-0,034t}$$

$$\ln\left(\frac{20000}{33700}\right) = -0,034t$$

$$t \approx \frac{\ln\left(\frac{20000}{33700}\right)}{-0,034}$$

$$t \approx 15$$

SVAR: 15 mån efter inköpet

b) $\frac{33700}{2} = 33700e^{-0,034t}$

$$0,5 = e^{-0,034t}$$

$$\ln 0,5 = -0,034t$$

$$t = \frac{\ln 0,5}{-0,034}$$

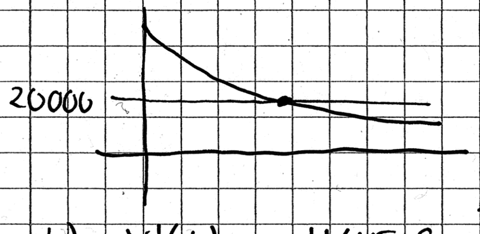
$$t \approx 20$$

SVAR: 20 mån efter inköpet

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en korrekt löst a)-uppgift vilket ger två modelleringspoäng på E-nivå. I b)-uppgiften ges ingen kommentar om varför den tecknade ekvationen kan ge ett korrekt svar, vilket ger noll poäng. Sammantaget ges lösningen två modelleringspoäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 20.2 (2 E_M och 2 C_M)

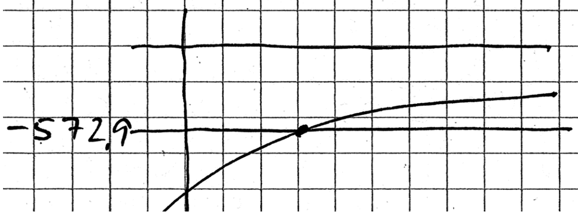
a) $33700e^{-0,034t} = 20000$



Intersect $\underline{t = 15,3 \text{ mån}}$

b) $V'(t) = -1145,8e^{-0,034t}$

$V'(0) = -1145,8$ $\quad V'(0)/2 = -572,9$

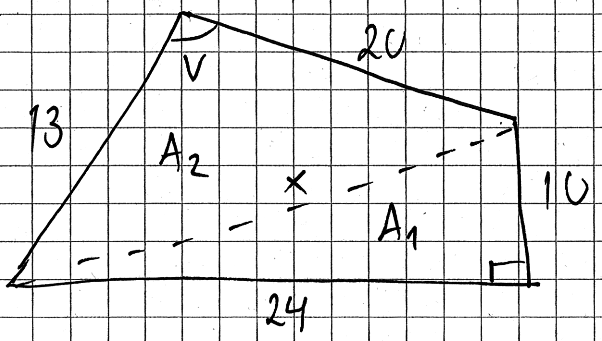


Intersect $\underline{t = 20,4 \text{ mån}}$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en knapphändig men godtagbar lösning till de båda deluppgifterna där digitala hjälpmedel använts. Trots lösningens knapphändighet anses den nätt och jämnt uppfylla kraven för två modelleringspoäng på E-nivå och två modelleringspoäng på C-nivå.

Uppgift 21

Elevlösningsexempel 21.1 (3 C_{PL} och 1 C_K)



$x^2 = 10^2 + 24^2$

$x^2 = 676$

$x = 26$ m

250 m^2 frön

$A_1 = \frac{10 \cdot 24}{2} = 120\ m^2$

$A_2 \quad x^2 = 26^2 = 13^2 + 20^2 - 2 \cdot 13 \cdot 20 \cdot \cos v$

$\cos v = \frac{26^2 - 13^2 - 20^2}{-2 \cdot 13 \cdot 20}$

$v = 101{,}87°$

$A_2 = \frac{13 \cdot 20 \cdot \sin 101{,}87°}{2} = 127\ m^2$

Arean $= 120 + 127 = 247\ m^2$ Fröna räcker!

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen är korrekt och ges tre problemlösningspoäng på C-nivå. När det gäller kommunikationen redovisas en tydlig figur och alla relevanta beräkningar. Användningen av symboler, index och enheter bedöms vara i huvudsak korrekt. Enheter saknas på något ställe och ± saknas i samband med ekvationslösningen i början. Hänvisning till Pythagoras sats, areasatsen och cosinussatsen saknas. Sammantaget bedöms lösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 22

Elevlösningsexempel 22.1 (1 A_M)

$V(t) = 0{,}10t^3 - 1{,}23t^2 + 6{,}51t + 3{,}72$

$V'(t) = 0{,}30t^2 - 2{,}46t + 6{,}51$

t	$V'(t)$
0	$= 0{,}30 \cdot 0^2 - 2{,}46 \cdot 0 + 6{,}51 \approx 6{,}51$
1	$= 0{,}30 \cdot 1^2 - 2{,}46 \cdot 1 + 6{,}51 \approx 4{,}35$
2	$= 0{,}30 \cdot 2^2 - 2{,}46 \cdot 2 + 6{,}51 \approx 2{,}79$
3	$= 0{,}30 \cdot 3^2 - 2{,}46 \cdot 3 + 6{,}51 \approx 1{,}83$
4	$= 0{,}30 \cdot 4^2 - 2{,}46 \cdot 4 + 6{,}51 \approx 1{,}47$
5	$= 0{,}30 \cdot 5^2 - 2{,}46 \cdot 5 + 6{,}51 \approx 1{,}71$
6	$= 0{,}30 \cdot 6^2 - 2{,}46 \cdot 6 + 6{,}51 \approx 2{,}55$

Viktens ändringshastighet kan vara

$1{,}47 \leq V'(t) \leq 6{,}51$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar insikt om att derivatans största och minsta värde ska undersökas. Lösningen visar hur ett närliggande värde till derivatans nollställe, $x = 4$, erhålls med hjälp av heltalsprövning. Denna prövning styrker dock inte att det endast finns ett nollställe till derivatan i det aktuella intervallet och inte heller att ett nollställe verkligen hittats. Därmed finns ingen grund för slutsatsen $1{,}47 \leq V'(t) \leq 6{,}51$*. Sammantaget ges elevlösningen första modelleringspoängen på A-nivå.

* Däremot, om prövningen varit mer systematisk kring $x = 4$, minimum då $x = 4{,}1$ styrkts genom diskussion om symmetriegenskaper hos andragradsfunktionen V' och lösningen i övrigt varit godtagbar skulle två modelleringspoäng på A-nivå kunna erhållas.

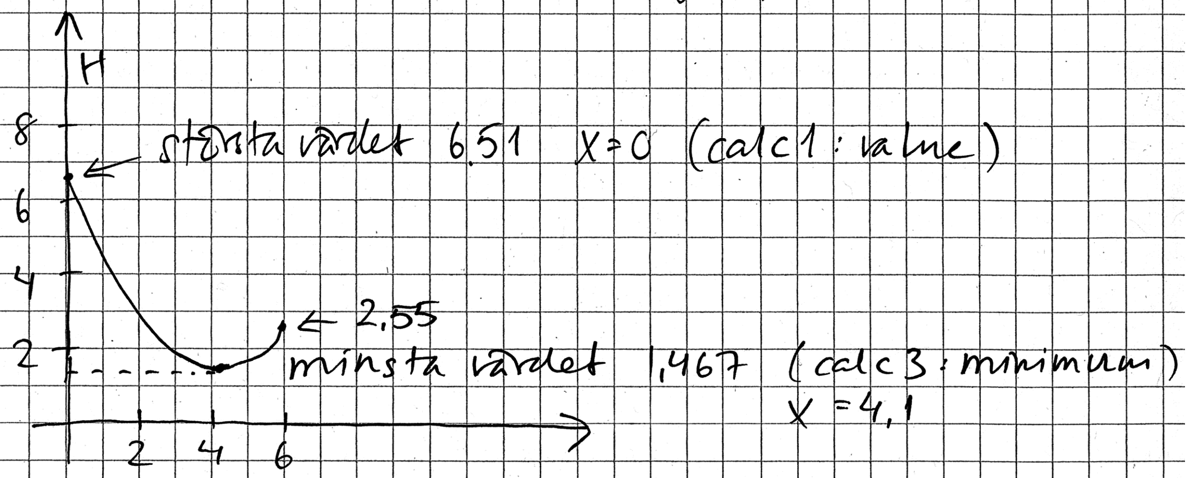
Elevlösningsexempel 22.2 (2 A_M)

$V(t) = 0,10t^3 - 1,23t^2 + 6,51t + 3,72$

Hastigheten på vikten är

$H(t) = 0,30t^2 - 2,46t + 6,51$

På räknaren ritar jag grafen $H(t)$



Hastigheten på vikten varierar mellan 1,467 kg/år och 6,51 kg/år

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas hur ändringshastigheten undersöks på grafräknaren. Grafen är begränsad till det aktuella intervallet och visar insikt om vilka tre värden som ska undersökas. Det största och minsta värdet har bestämts med hjälp av grafräknaren. Funktionsvärdet 2,55 är inte nödvändigt att bestämma då figuren tydligt visar det största och minsta värdet inom det aktuella intervallet. Elevlösningen ges två modellringspoäng på A-nivå.

Uppgift 23

Elevlösningsexempel 23.1 (0 poäng)

Om $f(x) = 2x + 4$ är $f'(x) = 2$ dvs > 0

för alla x

$2x + 4 = 0$

$x = -2$

alltså finns bara en reell lösning då $f'(x) > 0$

Bedömningskommentar till exemplet: Eftersom slutsatsen baseras på ett specialfall och inte en generell behandling ges elevlösningen noll poäng.

Elevlösningsexempel 23.2 (1 A_R)

Om grafen aldrig har negativ lutning $(= f'(x) > 0)$ så kan den bara skära x-axeln $(f(x) = 0)$ max en gång, eftersom efter den skurit x-axeln så kommer värdet bara att öka (grafen går uppåt).

Bedömningskommentar till exemplet: Av elevlösningen framgår att positiv derivata innebär att funktionen är växande. Däremot påstås att grafen skär x-axeln ”max en gång”, vilket är felaktigt, och det framgår inte tydligt att ekvationen $f(x) = 0$ har en reell lösning. Sammantaget anses elevlösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för den första resonemangspoängen på A-nivå.

Elevlösningsexempel 23.3 (2 A_R)

$f'(x) > 0$ för alla x

$\downarrow$

Om $f'(x) > 0$ så är $f(x)$ bara växande.

$\Rightarrow$ Alltså inga max- eller minpunkter.

Ingen terrasspunkt heller. Då finns det en reell lösning för $f(x) = 0$ och det är där funktionen skär x-axeln.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen ges ett resonemang som leder fram till den korrekta slutsatsen att ekvationen har en reell lösning. Informationen ”Alltså inga max- eller minpunker. Ingen terrasspunkt heller.” är inte nödvändig för att resonemanget ska anses vara fullständigt men tydliggör resonemanget. Lösningen bedöms uppfylla kraven för två resonemangspoäng på A-nivå.

Uppgift 24

Elevlösningsexempel 24.1 (1 C_M och 2 A_M)

a) $A = x \cdot y = x(-0{,}5x^3 + x + 3)$ där x är bredden

$A = -0.5x^4 + x^2 + 3x$

$A' = -2x^3 + 2x + 3$ $A' = 0$

$0 = -2x^3 + 2x + 3$ Miniräknarens Equation

$x = 1{,}431.. \approx 1{,}43$

b) $A = x^2$ $2{,}179 > x > 0$

$x = y$

$x = -0.5x^3 + x + 3$

$0 = -0.5x^3 + 3$

$x \approx 1{,}817$

Bedömningskommentar till exemplet: Lösningen till deluppgift a) är godtagbar förutom att verifiering av maximum saknas och därmed ges den första modelleringspoängen på C-nivå men inte den andra. Lösningen till deluppgift b) är korrekt vilket ger två modelleringspoäng på A-nivå. Eftersom verifieringen saknas i deluppgift a) anses inte uppgiften vara löst i sin helhet och därmed bedöms inte kommunikation. Sammantaget ges elevlösningen en modelleringspoäng på C-nivå och två modelleringspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 24.2 (2 C_M, 2 A_M och 1 A_K)

a) Arean för servetterna blir xy

$y = -0.5x^3 + x + 3$

ihs y i xy ger det

$x(-0.5x^3 + x + 3) = A$

$A = -0.5x^4 + x^2 + 3x$

Extrempunkterna är då $f'(x) = 0$

$f'(x) = 2x - 2x^3 + 3$

$0 = 2x - 2x^3 + 3$

Equation ger mig $x = 1.431$

Jag ritar upp $f'(x)$ på räknaren och ser att derivatan är negativ då $x = 1.43$, dvs. max!

SVAR: Bredden är 1.43 dm

b) Om servetterna ska vara kvadratiska innebär det att $y = x$ vilket ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} y = x \\ y = -0.5x^3 + x + 3 \end{cases}$$

$x = -0.5x^3 + x + 3$

$0 = -0.5x^3 + 3$

$x = \sqrt[3]{6}$

SVAR: Bredden är $\sqrt[3]{6}$ dm

Bedömningskommentar till exemplet: Lösningen till deluppgift a) och b) är korrekta och ges därmed två modelleringspoäng på C-nivå och två modelleringspoäng på A-nivå. När det gäller kommunikation anses lösningen vara lätt att följa och förstå förutom att variabeln *x* inte är definierad och att det inte tydligt framgår hur verifiering av maximum utförts på räknaren. I deluppgift b) anges svaret i exakt form vilket bedöms som godtagbart. Sammantaget anses elevlösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för kommunikationspoängen på A-nivå.

Uppgift 25

Elevlösningsexempel 25.1 (2 A_{PL})

$f(x) = x^3 + kx^2 + 2{,}9kx$

$f'(x) = 3x^2 + 2kx + 2{,}9k$

$f''(x) = 6x + 2k$

(2) $6x + 2k = 0$

$k = -3x$

sätt in i (1)

$$\begin{cases} 3x^2 + 2kx + 2{,}9k = 0 & (1) \\ 6x + 2k = 0 & (2) \end{cases}$$

$3x^2 + 2 \cdot -3x \cdot x + 2{,}9 \cdot -3x = 0$

$3x^2 - 6x^2 - 8{,}7x = 0$

$-3x^2 - 8{,}7x = 0$

$x^2 + 2{,}9x = 0$

$$x = \frac{-2{,}9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2{,}9}{2}\right)^2} = \frac{-2{,}9}{2} \pm \frac{2{,}9}{2}$$

$x_1 = 0 \rightarrow k_1 = -3 \cdot 0 = 0$

$x_2 = -2{,}9 \rightarrow k_2 = -3 \cdot -2{,}9 = 8{,}7$

$k > 0$ bortse från ena roten

SVAR: $k = 8{,}7$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen tecknas ett korrekt ekvationssystem som mynnar ut i ett korrekt svar. Därmed ges två problemlösningspoäng på A-nivå. När det gäller kommunikation är elevlösningen inte helt lätt att följa och förstå i inledningen eftersom det inte framgår varför andraderivatan sätts till noll. Parenteser runt negativa tal saknas. Därmed anses inte kraven för kommunikationspoängen på A-nivå vara uppfyllda.

Elevlösningsexempel 25.2 (1 A_{PL} och 1 A_K)

$$f(x) = x^3 + kx^2 + 2{,}9kx$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2kx + 2{,}9k$$

$$3x^2 + 2kx + 2{,}9k = 0$$

$$x^2 + \frac{2}{3}kx + \frac{2{,}9k}{3} = 0$$

$$x = -\frac{k}{3} \pm \sqrt{\left(-\frac{k}{3}\right)^2 - \frac{2{,}9k}{3}}$$

Vid en terrasspunkt har f'(x) bara ett nollställe
Eftersom det bara ska finnas ett nollställe är

$$\sqrt{\left(-\frac{k}{3}\right)^2 - \frac{2{,}9k}{3}} = 0$$

$$\frac{k^2}{9} = \frac{2{,}9k}{3}$$

$$k = 3 \cdot 2{,}9 = 8{,}7$$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen tecknas ekvationen $f'(x) = 0$ och diskriminanten sätts lika med noll. Lösningen av andragradsekvationen är felaktig då endast en lösning presenteras utan att det förklaras varför. Därmed uppfylls inte kraven för den andra problemlösningspoängen på A-nivå. När det gäller kommunikation anses uppgiften vara löst i sin helhet (trots den felaktiga ekvationslösningen) och är i övrigt lätt att följa och förstå eftersom det framgår varför diskriminanten sätts lika med noll. Lösningen är välstrukturerad och innehåller korrekt använda symboler. Kraven för kommunikationspoängen på A-nivå anses därmed vara uppfyllda.