Bedömningsanvisningar

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

Delprov B

1.		**Max 2/0/0**
a)	Korrekt svar ($\frac{\sqrt{3}}{2}$)	+1 E_P
b)	Korrekt svar ($2\cos 2x$)	+1 E_P
2.		**Max 2/0/0**
	Anger minst ett värde där funktionen inte är definierad, t ex 2	+1 E_B
	med korrekt angivna ekvationer ($x = -2$ och $x = 2$)	+1 E_B
3.		**Max 2/0/0**
a)	Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning ($-3-4i$)	+1 E_B
b)	Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning (5)	+1 E_B
4.		**Max 1/1/0**
	Anger minst en av konstanterna *A*, *B* eller *k* godtagbart	+1 E_B
	med godtagbart svar ($y = 1,5\sin(2x)+1$)	+1 C_B
5.		**Max 1/1/0**
	Anger minst en konstant godtagbart	+1 E_B
	med godtagbart svar ($a = -1$ och $b = 2$)	+1 C_B
6.		**Max 1/1/0**
a)	Korrekt svar ($10°$)	+1 E_B
b)	Korrekt svar ($154°$)	+1 C_B

7. **Max 0/1/0**

Korrekt svar ($f(x) = x^2 \cdot \sin x$) +1 C_{PL}

Kommentar: Svar där en konstant adderats till det korrekta svaret (t ex $f(x) = x^2 \cdot \sin x + 3$) anses godtagbart.

8. **Max 0/0/1**

Korrekt svar (A och B) +1 A_B

Delprov C

9. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, använder sinus för dubbla vinkeln +1 E_R

med ett enkelt resonemang som visar att VL = HL +1 E_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

10. **Max 2/1/0**

Godtagbar ansats, bestämmer minst en vinkel korrekt +1 E_P

med godtagbar fortsättning, bestämmer minst två vinklar korrekt +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar
($x = 10° + n \cdot 120°$ eller $x = 50° + n \cdot 120°$) +1 C_P

11. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t ex tecknar uttryck för $|z_1|$ och $|z_2|$,
$|z_1| = \sqrt{a^2 + a^2}$ och $|z_2| = \sqrt{(a+1)^2 + (a-1)^2}$ +1 C_R

med i övrigt godtagbart genomfört bevis +1 C_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

12. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, t ex korrekt insättning av roten med korrekt förenkling *eller* kommer fram till uttrycket $(x-(1+\mathrm{i}\sqrt{3}))\cdot(x-(1-\mathrm{i}\sqrt{3}))$ +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($a=-2$ och $b=4$) +1 C_{PL}

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C_K

__Se avsnittet Bedömda elevlösningar.__

13. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t ex faktoriserar ekvationen,
$z^3+2z^2+5z+10=(z+2)(z^2+5)$ +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($z=\pm\mathrm{i}\sqrt{5}$) +1 C_P

14. **Max 0/2/1**

Godtagbart resonemang som leder till en korrekt slutsats för
$B>5$ *eller* $B=5$ *eller* positiva $B<5$ +1 C_R

med godtagbart fortsatt resonemang som t ex leder till korrekt slutsats för alla positiva värden på B +1 C_R

med ett godtagbart slutfört resonemang som leder till korrekt slutsats för alla värden på B (Det finns inga lösningar om $-5<B<5$, två lösningar om $B=\pm5$ och fyra lösningar om $B<-5$ eller $B>5$) +1 A_R

__Se avsnittet Bedömda elevlösningar.__

15. **Max 0/1/1**

Godtagbar ansats, bestämmer korrekt primitiv funktion +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (3) +1 A_P

16. **Max 0/0/3**

Godtagbar ansats, t ex bestämmer $\mathrm{Im}\, z$ +1 A_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar
($z_1=1+2\mathrm{i}$ och $z_2=4+2\mathrm{i}$) +1 A_P

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 A_K

__Se avsnittet Bedömda elevlösningar.__

17. **Max 0/0/4**

Godtagbar ansats, t ex bestämmer integrationsgränserna korrekt +1 A_R

med godtagbar fortsättning, bestämmer en av areorna korrekt,
t ex $-\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{2}$ +1 A_R

med i övrigt godtagbart genomfört bevis +1 A_R

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

18. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, t ex delar upp vinkeln α och inser att additionssatsen för sinus ska användas +1 A_B

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (63/65) +1 A_{PL}

Delprov D

19. **Max 1/0/0**

Godtagbart svar $(-5,71)$ +1 E_P

20. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, bestämmer ett godtagbart värde på P:s x-koordinat, $x=4,12$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (2,66) +1 E_{PL}

21. **Max 1/2/0**

a) Korrekt svar (137,5 m) +1 E_M

b) Godtagbar ansats, t ex bestämmer godtagbart minst en av tidpunkterna då höjden är 40 m +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (19 minuter) +1 C_M

Bedömda elevlösningar

Uppgift 9.

Elevlösning 9.1 (1 E_R)

$$\frac{\sin 2x}{2\cos x} = \sin x$$

$$\sin 2x = 2\cos x \cdot \sin x$$

$$2\sin x \cos x = 2\sin x \cos x \qquad \text{V.S.V.}$$

Kommentar: Elevlösningen bygger på likheten som ska visas. Därmed bedöms lösningen inte uppfylla kraven för den andra resonemangspoängen på E-nivå.

Uppgift 11.

Elevlösning 11.1 (1 C_R)

$$z_1 = a + ai$$

$$|z_1| = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}\,a$$

$$z_2 = (a+1) + (a-1)i$$

$$|z_2| = \sqrt{(a+1)^2 + (a-1)^2} =$$

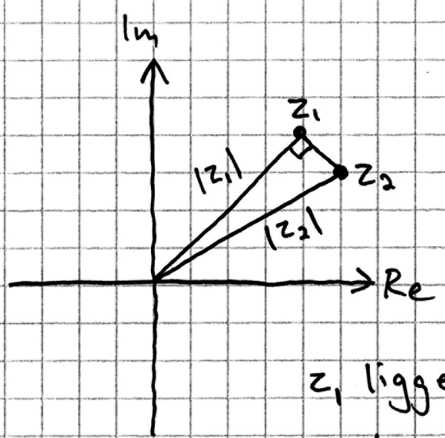
$$= \sqrt{a^2 + 2a + 1 + a^2 - 2a + 1} =$$

$$= \sqrt{2a^2 + 2}$$

$$\sqrt{2}\,a < \sqrt{2a^2+2} \Rightarrow |z_1| < |z_2|$$

Kommentar: Elevlösningen innehåller ett resonemang som leder till konstaterandet att $\sqrt{2}a < \sqrt{2a^2+2}$ utan att detta motiveras. Därmed anses beviset inte vara godtagbart vilket gör att kraven för den andra resonemangspoängen på C-nivå inte är uppfyllda.

Elevlösning 11.2 (2 C_R)



z_1 ligger på 45°-linjen.
z_2 ligger $\xrightarrow{1}\downarrow 1$ från z_1
Det blir en rätvinklig triangel
där $|z_2|$ är längsta sidan
och $|z_1|$ är kortare.
Alltså: $|z_2| > |z_1|$ V.S.V.

Kommentar: Elevlösningen innehåller ett bevis som genomförs med hjälp av en grafisk tolkning av olikheten. Trots att argumentationen för att det bildas en rätvinklig triangel är vag anses lösningen uppfylla kraven för båda resonemangspoängen på C-nivå.

Uppgift 12.

Elevlösning 12.1 (2 C_{PL})

Om $x_1 = 1 + i\sqrt{3}$ är $x_2 = 1 - i\sqrt{3}$
dvs $x = 1 \pm i\sqrt{3}$
enligt pq-formeln är $a = -2$ och
då måste $b = 4$ för att det ska bli $\sqrt{-3}$
i pq-formeln.

Svar: $a = -2$
$b = 4$

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften på ett knapphändigt men godtagbart sätt. När det gäller kommunikation är lösningen inte helt lätt att följa och förstå. Det saknas t ex förklaring till slutsatserna om *a* och *b* på raderna 3–5. Därmed bedöms lösningen inte uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå.

Elevlösning 12.2 (2 C_{PL} och 1 C_K)

$x^2 + ax + b = 0 \qquad x = 1 + i\sqrt{3}$

$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 - b} \Rightarrow \left(-\frac{a}{2}\right) = 1$

$\frac{a}{2} = 1 \cdot (-1) = -1$

$a = 2 \cdot (-1) = -2$

$a = -2$

$i\sqrt{3} = \sqrt{\left(-\frac{-2}{2}\right)^2 - b}$

$\left(-\frac{-2}{2}\right)^2 = 1 \qquad \sqrt{3} \cdot i = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-3}$

$\sqrt{-3} = \sqrt{1-b}$

$1 - b = -3$

$b = 4$

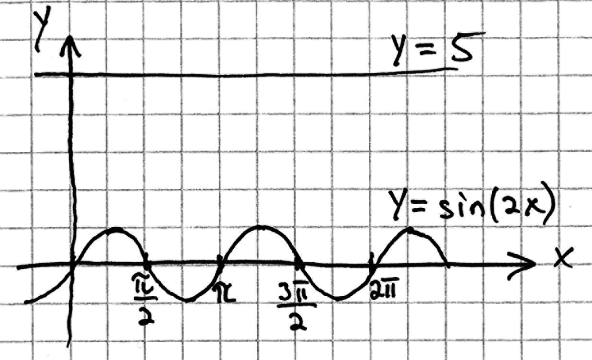
Svar: $a = -2$

$b = 4$

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet och leder fram till ett korrekt svar. Gällande kommunikation hade lösningen kunnat vara mer strukturerad men anses ändå möjlig att följa och förstå. Därmed anses lösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng.

Uppgift 14.

Elevlösning 14.1 (2 C_R)



$B \sin(2x) = 5 \qquad 0 \leq x < 2\pi$

B måste vara $B \geq 5$ eller $B \leq -5$ för att ekvationen ska få lösningar. Detta beror på att sin(2x) maxvärde är 1 och därför kan den inte nå 5 annars.

Om $B = 5$ kommer det att finnas två lösningar i $\frac{\pi}{4}$ och $\frac{5\pi}{4}$, om $B = -5$ (kurvan "vänds") finns två lösningar i $\frac{3\pi}{4}$ och $\frac{7\pi}{4}$.

Annars finns det alltid 4 lösningar.

Kommentar: Elevlösningen innehåller ett godtagbart resonemang om att $B \geq 5$ eller $B \leq -5$ måste gälla för att ekvationen ska få lösningar. Vidare anges ekvationens lösningar då $B = 5$ och $B = -5$. Tillsammans med figuren anses detta vara ett nätt och jämnt godtagbart resonemang för att visa att ekvationen har två lösningar för dessa värden på B. Avslutningsvis anges att det för övriga värden på B finns 4 lösningar. Denna slutsats stöds dock inte av något godtagbart resonemang. Sammantaget anses elevlösningen innehålla godtagbara resonemang med korrekta slutsatser för $-5 < B < 5$, $B = 5$ och $B = -5$. Därmed anses kraven för de två resonemangspoängen på C-nivå vara uppfyllda.

Elevlösning 14.2 (2 C_R)

Eftersom B är amplituden bestämmer den hur högt sinuskurvan går. Om $B < 5$ får vi inga lösningar.

Om $B = 5$:

$5 \sin 2x = 5$

$\sin 2x = 1 \rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \end{cases}$

$\rightarrow x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}$ och $x_2 = \frac{5\pi}{4}$

Om $B = 5$ får vi 2 lösningar.

Om $B > 5$ får vi dubbelt så många lösningar än om $B = 5$, d.v.s. 4 lösningar. Detta för att kurvans topp (vid $\frac{\pi}{4}$ och $\frac{5\pi}{4}$) kommer ovanför 5 så vi får två lösningar runt $\frac{\pi}{4}$ och två runt $\frac{5\pi}{4}$.

Kommentar: Elevlösningen innehåller ett nätt och jämnt godtagbart resonemang om amplitud som leder till korrekt slutsats för $B < 5$. För fallet $B = 5$ löses ekvationen och en korrekt slutsats att ekvationen har 2 lösningar dras. För $B > 5$ innehåller lösningen ett nätt och jämnt godtagbart resonemang om varför det blir dubbelt så många lösningar som när $B = 5$. Sammantaget anses kraven för de två resonemangspoängen på C-nivå vara uppfyllda.

Uppgift 16.

Elevlösning 16.1 (2 A_P)

$|z|^2 = 5z - 10i$ $\quad |z| = \sqrt{5z-10i}$

$|z| \cdot |z| = 5z - 10i$

$a^2+b^2 = 5(a+bi) - 10i$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\quad z = a+bi$

$|z|^2 = a^2+b^2$ $\quad a^2+b^2 = 5z - 10i$

$\frac{|z|^2 + 10i}{5} = z$ $\quad |z|^2 + 10i = 5z$

$a^2+b^2 = 5a + 5bi - 10i$ Jag tar bort

$a^2 + 2^2 = 5a \Rightarrow a^2 - 5a + 4$

Pq ger $a = 2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 4} \Rightarrow 2,5 \pm \sqrt{2,25} \Rightarrow 2,5 \pm 1,5$

$a_1 = 4 \quad a_2 = 1$

a^2+b^2 = bara reella tal $\Rightarrow 5bi - 10i = 0 \quad b = 2$

Svar: Det finns 2 lösningar

$z = 4+2i$ eller $1+2i$

Kommentar: Elevlösningen innehåller en korrekt bestämning av ekvationens rötter. När det gäller kommunikation är lösningen bitvis ostrukturerad och innehåller ovidkommande led. Detta gör att kraven för kommunikationspoäng på A-nivå inte anses uppfyllda. Sammantaget ges lösningen två procedurpoäng på A-nivå.

Elevlösning 16.2 (2 A_P och 1 A_K)

$|z|^2 = 5z - 10i \qquad z = a + bi$

$|z|^2 - 5z = -10i \rightarrow a^2 + b^2 - (5a + 5bi) = -10i$

$-5b = -10$

$b = 2$

$a^2 + 2^2 - 5a = 0$

$a^2 - 5a + 4 = 0$

$a = 2{,}5 \pm \sqrt{2{,}25} = 2{,}5 \pm 1{,}5$

$a = 4, \qquad a = 1$

Svar: $z = 4 + 2i$ eller $z = 1 + 2i$

Kommentar: Elevlösningen innehåller en korrekt lösning av ekvationen. När det gäller kommunikation är lösningen något kortfattad och förklarande text saknas. Lösningen anses ändå vara lätt att följa och förstå och uppfyller nätt och jämnt kraven för kommunikationspoäng på A-nivå.

Uppgift 17.

Elevlösning 17.1 (3 A_R)

$f(x) = x^2 + 3$

$g(x) = -x^3 + x^2 + kx + 3$ där $k > 0$

$f(x) = g(x)$

$\Rightarrow \cancel{x^2} + \cancel{3} = -x^3 + \cancel{x^2} + kx + \cancel{3}$

$0 = -x^3 + kx$

$0 = -x^2 + k$

$x_1 = \sqrt{k}$ $\quad x_2 = -\sqrt{k}$

$$A = \int_{-\sqrt{k}}^{0} x^3 - kx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{kx^2}{2}\right] =$$

$$0 - \left(\frac{(-k^{0,5})^4}{4} - \frac{k(-k^{0,5})^2}{2}\right) = -\frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{2}$$

$$B = \int_{0}^{\sqrt{k}} -x^3 + kx = \left[\frac{-x^4}{4} + \frac{kx^2}{2}\right] =$$

$$\frac{-(k^{0,5})^4}{4} + \frac{k(k^{0,5})^2}{2} = -\frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{2}$$

$A = B = -\frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{2}$ $\quad$ k spelar ingen roll

V.S.V.

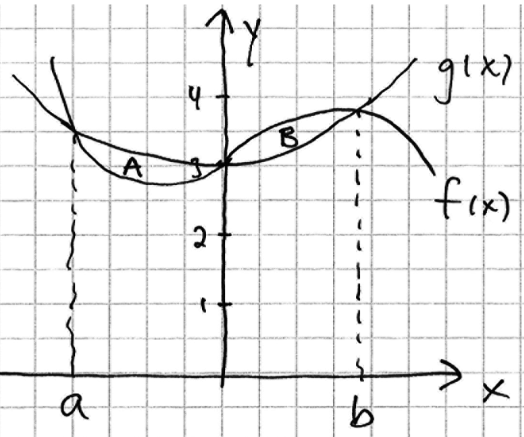
Kommentar: Elevlösningen innehåller ett bevis av att areorna är lika stora oavsett värde på *k*. När det gäller kommunikation så saknas dx i integralen och parentes runt integranden. Integrationsgränserna saknas vid klamrarna runt primitiva funktionen. Det framgår inte att det är skillnaden mellan funktionerna som integreras. Dessutom motiveras inte hur integrationsgränsen $x = 0$ bestämts. Därmed anses inte kraven för kommunikationspoäng på A-nivå vara uppfyllda. Sammantaget ges lösningen de tre resonemangspoängen på A-nivå.

Elevlösning 17.2 (2 A_R och 1 A_K)

$f(x) = x^2 + 3$

$g(x) = -x^3 + x^2 + kx + 3$

$A = B$



$$B = \int_0^b (-x^3 + x^2 + kx + 3)\,dx - \int_0^b (x^2 + 3)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^b (-x^3 + kx)\,dx$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{kx^2}{2}\right]_0^b = -\frac{b^4}{4} + \frac{kb^2}{2} - 0$$

$$A = \int_a^0 (x^2 + 3)\,dx - \int_a^0 (-x^3 + x^2 + kx + 3)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^0 (x^3 - kx)\,dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x^4}{4} - \frac{kx^2}{2}\right]_a^0 = 0 - \left(\frac{a^4}{4} - \frac{ka^2}{2}\right) = -\frac{a^4}{4} + \frac{ka^2}{2}$$

$$-\frac{a^4}{4} + \frac{ka^2}{2} = -\frac{b^4}{4} + \frac{kb^2}{2}$$

a o $b = x$ när $f(x) = g(x)$

$\Rightarrow x^2 + 3 = -x^3 + x^2 + kx + 3$

$\Rightarrow -x^3 + kx = 0 \Rightarrow x^3 = kx \Rightarrow x^2 = k$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{k}$

$a = -\sqrt{k} \quad b = \sqrt{k}$

forts $\Rightarrow$

$$-\frac{a^4}{4} + \frac{ka^2}{2} = -\frac{b^4}{4} + \frac{kb^2}{2}$$

$$a = -\sqrt{k} \qquad b = \sqrt{k}$$

$$-\frac{(-k^{0,5})^4}{4} + \frac{k \cdot k}{2} = -\frac{(k^{0,5})^4}{4} + \frac{k\,(k^{0,5})^2}{2}$$

$$-\frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{2} = -\frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{2}$$

Svar: B är lika stor som A oavsett värdet på k. V.S.V.

Kommentar: Elevlösningen innehåller ett resonemang som visar att areorna är lika stora. Eftersom lösningen utgår från likheten som ska visas anses inte kraven för den tredje resonemangspoängen vara uppfyllda. När det gäller kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå. En figur definierar skärningspunkter vid $x = a$ och $x = b$. Figuren visar också att kurvorna skär varandra i punkten $(0, 3)$ vilket anses stödja att $x = 0$ är den tredje integrationsgränsen. Sammantaget ges lösningen två resonemangspoäng på A-nivå och en kommunikationspoäng på A-nivå.