

Part B	Problems 1–8 which only require answers.
Part C	Problems 9–18 which require complete solutions.
Test time	150 minutes for Part B and Part C together.
Resources	Formula sheet and ruler.

Level requirements

The test consists of three written parts (Part B, Part C and Part D). Together they give a total of 61 points consisting of 21 E-, 23 C- and 17 A-points.

Level requirements for test grades

E: 15 points

D: 24 points of which 7 points on at least C-level

C: 31 points of which 13 points on at least C-level

B: 41 points of which 5 points on A-level

A: 49 points of which 9 points on A-level

The number of points you can get for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge levels (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled “*Only answer is required*” you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

Name: _____

Date of birth: _____

Educational programme: _____

Part B: Digital resources are not allowed. *Only answer is required.* Write your answers in the test booklet.

1. It holds for the function f that $f(x) = \sin 2x$.

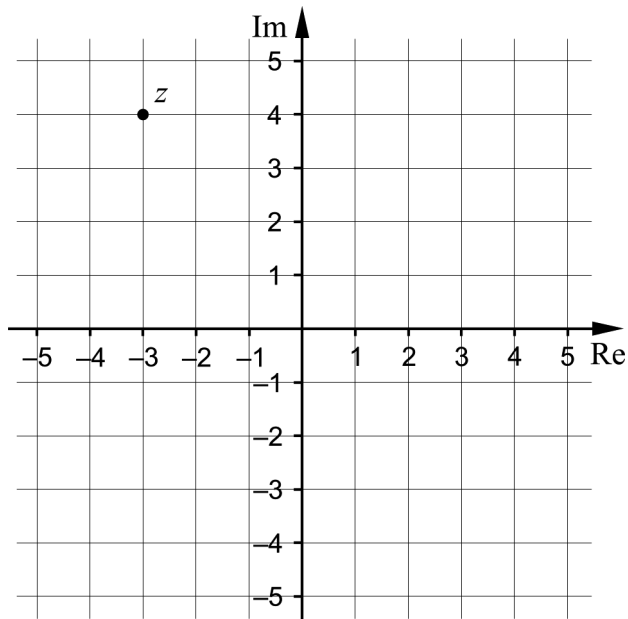
a) Find $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$. _____ (1/0/0)

b) Find $f'(x)$. _____ (1/0/0)

2. Write down the vertical asymptotes of $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

_____ (2/0/0)

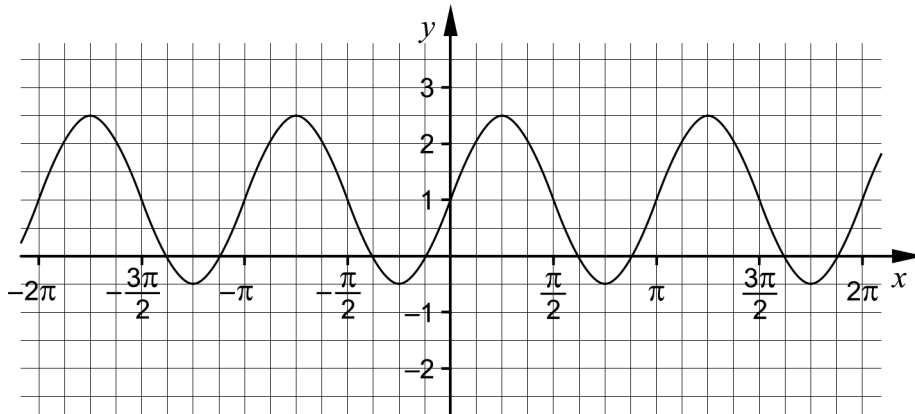
3. The figure shows a complex plane where the number z has been marked.



a) Find \bar{z} . _____ (1/0/0)

b) Find $|z|$. _____ (1/0/0)

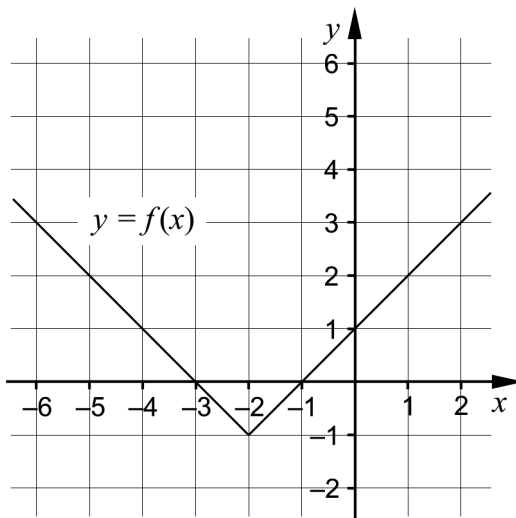
4. The figure shows a sine curve.



Find the equation of the sine curve in the form $y = A \sin(kx) + B$.

$y =$ _____ (1/1/0)

5. The figure shows the graph of $f(x) = a + |x + b|$.

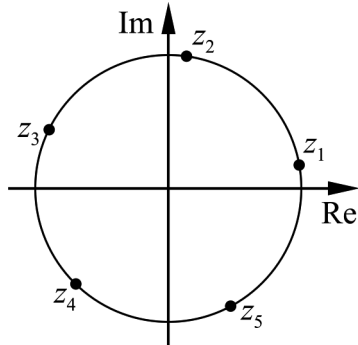


Find the constants a and b .

$a =$ _____

$b =$ _____ (1/1/0)

6. The figure shows the circle $|z|=1$ in the complex plane. The five roots z_1, z_2, z_3, z_4 and z_5 of the equation $z^5 = \cos 50^\circ + i \sin 50^\circ$ are marked on the circle.



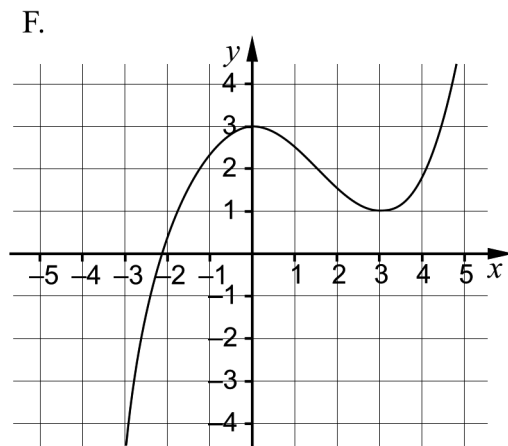
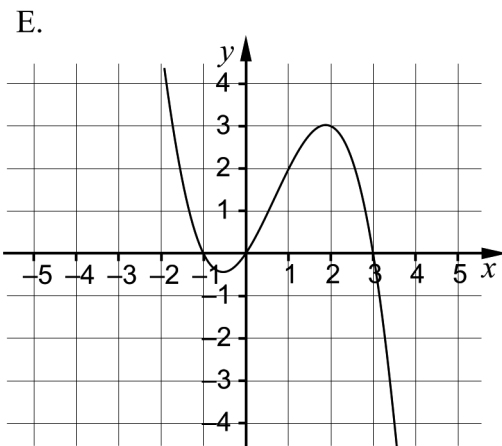
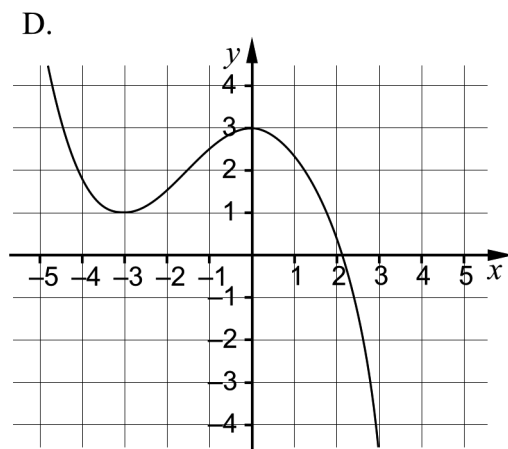
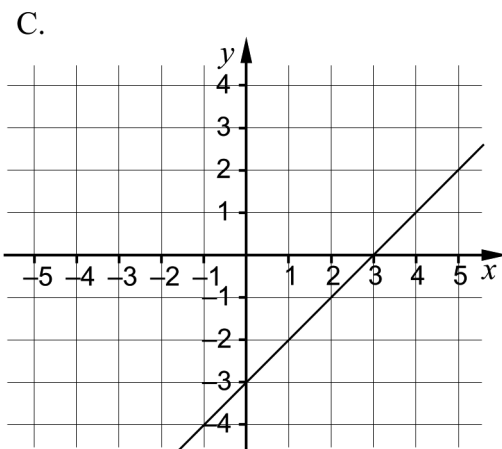
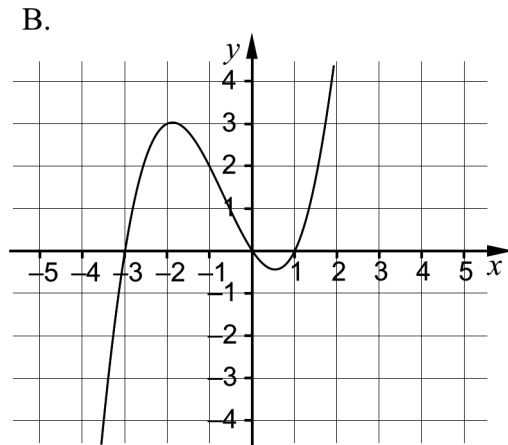
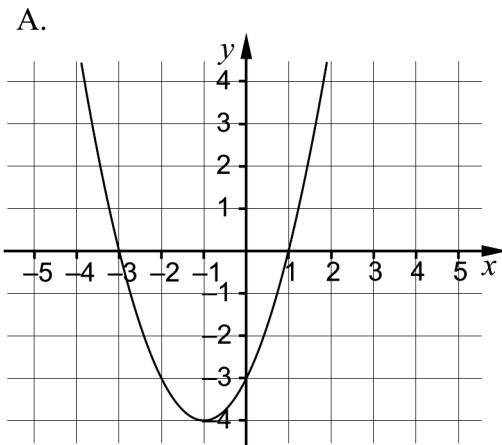
a) Find $\arg z_1$ _____ (1/0/0)

b) Find $\arg z_3$ _____ (0/1/0)

7. Chen is going to differentiate the function f . He sees that the function is a product. Chen differentiates the function and gets the correct answer
 $f'(x) = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$.

Find the function f . _____ (0/1/0)

8. The figures A–F show the graphs of six different polynomial functions.



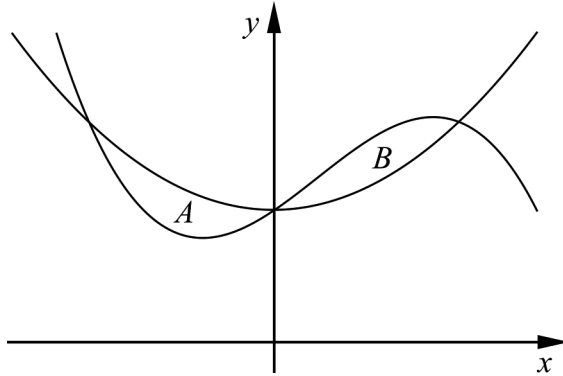
Two of the figures A–F show the graphs of polynomial functions that are divisible by $x + 3$. Which two?

_____ (0/0/1)

Part C: Digital resources are not allowed. Do your solutions on separate sheets of paper.

9. Show that $\frac{\sin 2x}{2 \cos x} = \sin x$ for all x where the expressions are defined. (2/0/0)
10. Solve the equation $\sin 3x = \frac{1}{2}$. Give the answer in degrees. (2/1/0)
11. In the two complex numbers $z_1 = a + ai$ and $z_2 = (a+1) + (a-1)i$ the constant a is a real number and $a > 0$. Show that $|z_1| < |z_2|$. (0/2/0)
12. The equation $x^2 + ax + b = 0$ has one root $x = 1 + i\sqrt{3}$. Determine the real constants a and b . (0/3/0)
13. One solution to the equation $z^3 + 2z^2 + 5z + 10 = 0$ is $z = -2$. Determine the remaining solutions to the equation. (0/2/0)
14. Investigate how the number of solutions to the equation $B \sin 2x = 5$ on the interval $0 \leq x < 2\pi$ depends on the value of the constant B . Justify that the equation has the number of solutions you claim for the different values of B . (0/2/1)
15. Determine the constant a so that $\int_2^4 \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x} \right) dx = \ln a$. (0/1/1)
16. Solve the equation $|z|^2 = 5z - 10i$. (0/0/3)

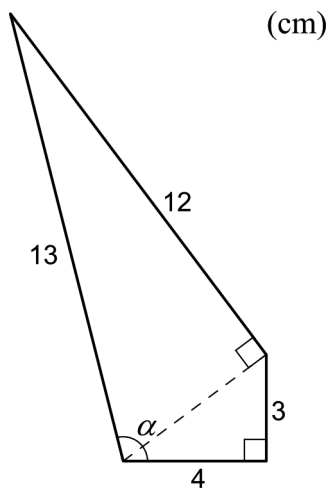
17. It holds for the functions f and g that $f(x) = x^2 + 3$ and $g(x) = -x^3 + x^2 + kx + 3$, where $k > 0$. The graphs of the functions f and g enclose the regions A and B , see figure.



Show that the area of A is equal to the area of B regardless of the value of k .

(0/0/4)

18. The figure shows a quadrangle divided into two right-angled triangles.



One of the angles in the quadrangle is denoted α . Determine $\sin \alpha$.

(0/0/2)

Part D	Problems 19–26 which require complete solutions.
Test time	120 minutes.
Resources	Digital resources, formula sheet and ruler.

Level requirements

The test consists of three written parts (Part B, Part C and Part D). Together they give a total of 61 points consisting of 21 E-, 23 C- and 17 A-points.

Level requirements for test grades

E: 15 points

D: 24 points of which 7 points on at least C-level

C: 31 points of which 13 points on at least C-level

B: 41 points of which 5 points on A-level

A: 49 points of which 9 points on A-level

The number of points you can get for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge levels (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled “*Only answer is required*” you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures and show how you use your digital resources.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

Name: _____

Date of birth: _____

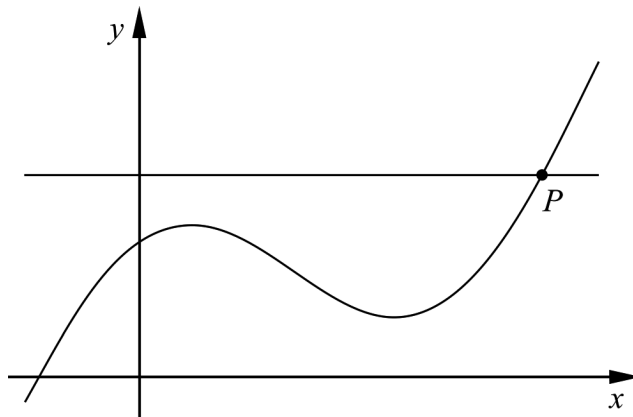
Educational programme: _____

Part D: Digital resources are allowed. Do your solutions on separate sheets of paper.

19. Find $f'(\frac{\pi}{5})$ if $f(x) = 2 \cos 3x$. Write your answer to two decimal places.

Only answer is required (1/0/0)

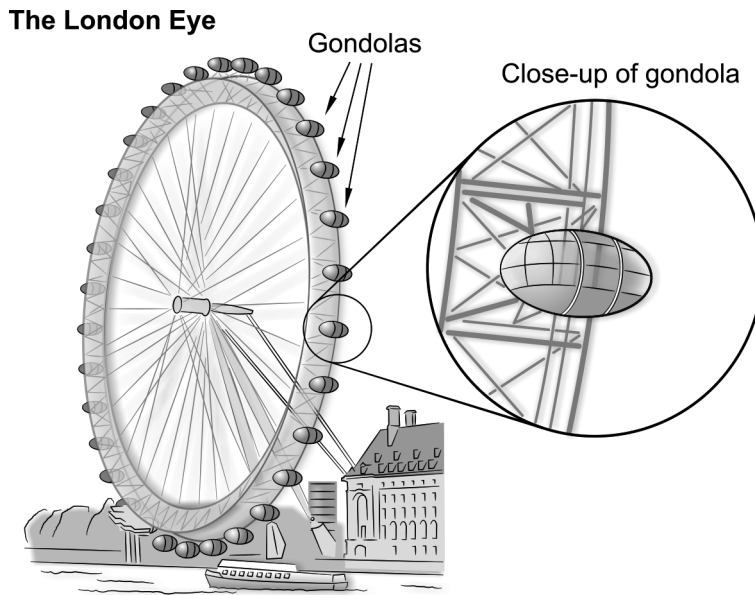
20. The figure shows the curve $y = x + 2 \cos x$ and the line $y = 3$ and their intersection point P .



- Determine the gradient of the curve $y = x + 2 \cos x$ at point P .
Write your answer to at least three significant figures.

(2/0/0)

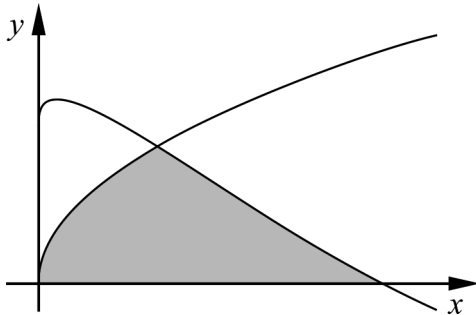
21. The London Eye, a Ferris wheel, has a diameter of 135 metres and one revolution takes 30 minutes.



The height above the ground of a gondola can be described by the function $h(t) = 67.5 \sin(0.209t - 1.57) + 70$; $0 \leq t \leq 30$ where h is the height above the ground in metres and t is the time in minutes after the start.

- a) What is the gondola's maximum height above the ground?
Only answer is required (1/0/0)
- b) Determine how long time the gondola is at least 40 m above the ground during one revolution. (0/2/0)
22. Frida has been prescribed medicine for her high blood pressure. How quickly her body breaks down the medicine can be described by the differential equation
- $$\frac{dm}{dt} = k \cdot m$$
- where k is a constant and m mg is the amount of medicine in the body t hours after she has been given the medicine.
- a) Show that $m(t) = C \cdot e^{kt}$ is a solution to the differential equation. (1/0/0)
- b) When Frida takes a tablet, the amount of medicine in her body is 100 mg. After 1 hour, the amount has decreased to 90 mg. Determine the constants C and k for the function $m(t) = C \cdot e^{kt}$ in this case. (2/0/0)
- c) Determine how long it takes for Frida's body to break down 90% of a given amount of medicine if no new medicine is added. (0/1/0)

23. The figure shows the graphs of the functions $y = e^{\sqrt{x}} - 2x$ and $y = \sqrt{x}$. The shaded region in the figure is bounded by the graphs of the functions and the x -axis.



Calculate the area of the shaded region.

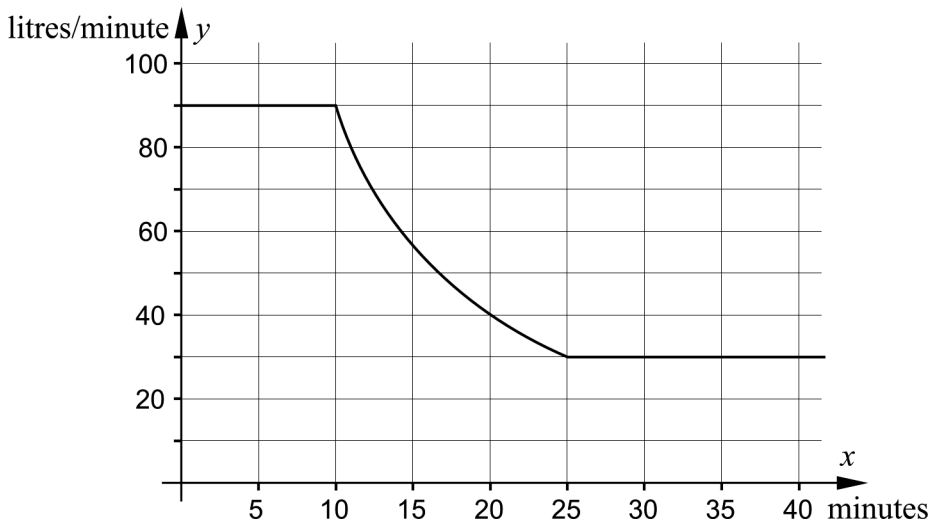
Write your answer in at least three significant figures.

(1/2/0)

24. An empty tank is to be filled with water. During the first 10 minutes, the filling rate is constant, 90 litres/minute. During the following 15 minutes the filling rate decreases due to lower water pressure. Then, the filling rate remains a constant 30 litres/minute.

The graph shows how the filling rate y litres/minute depends on time x minutes. During the time the water pressure decreases,

the filling rate is given by the function $y = \frac{1000}{x} - 10$



Determine how long it takes to fill the tank with 2000 litres of water.

(0/3/0)

25. A region is bounded by the curve $y = x^2 - 4$ and the line $y = 5$. Calculate the volume formed when this region is rotated around the line $y = 5$

(0/0/3)

26. A laser pointer is placed on a rotating disc. A red luminous point can be seen where the laser beam from the laser pointer hits the wall. The distance between the wall and the centre of the rotating disc is L metres. At time $t = 0$ the laser beam shines against the wall at a right angle, see figure 1.

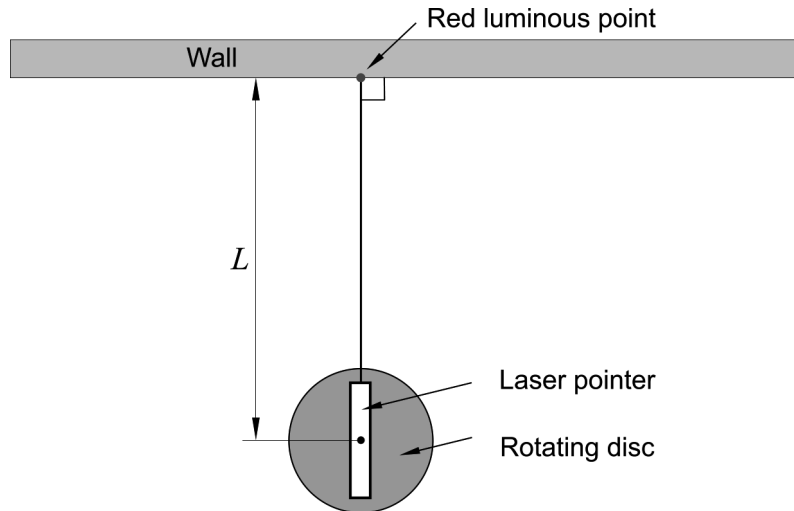


Figure 1

The disc with the laser pointer rotates so that the red luminous point moves to the right on the wall. At the time t seconds, the disc has rotated the angle v radians and the luminous point has moved a distance of x metres along the wall. See figure 2.

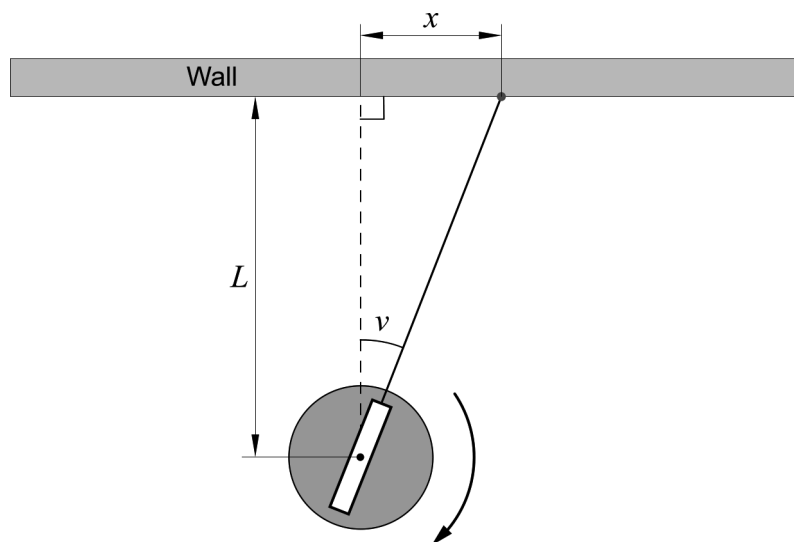


Figure 2

The disc is rotated at a constant angular velocity C radians/s so that $v = C \cdot t$

The luminous point moves along the wall at the velocity $\frac{dx}{dt}$

Determine an expression for the velocity $\frac{dx}{dt}$

(0/0/2)

Innehåll

Allmänna riktlinjer för bedömning	3
Bedömningsanvisningar	3
Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga	4
Provsammanställning – Kunskapskrav	5
Provsammanställning – Centralt innehåll	6
Kravgränser	7
Resultatsammanställning	7
Bedömningsformulär	8
Bedömningsanvisningar	9
Delprov B	9
Delprov C	10
Delprov D	12
Bedömda elevlösningar	15
Uppgift 9	15
Uppgift 11	15
Uppgift 12	16
Uppgift 14	18
Uppgift 16	20
Uppgift 17	22
Uppgift 24	25
Ur ämnesplanen för matematik	27
Kunskapskrav Matematik kurs 4	28
Centralt innehåll Matematik kurs 4	29

Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som provas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsanvisningar

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt två olika modeller. Avvikelser från dessa kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.

Modell 1:

Godtagbar ansats, t.ex. ...	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (...)	+1 E_P

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2:

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. ...	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. ...	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. ...
1 E_R	1 E_R och 1 C_R	1 E_R , 1 C_R och 1 A_R

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=, \neq, <, >, \leq, \geq, \approx, \pm, \sqrt{\quad}, f(x), f'(x), f''(x), x, y, (\quad), [\quad], \int, dx,$ gradtecken, index, lim, VL, HL, $\sin v, \sin^2 v$
Termer	t.ex. komplext tal, komplext talplan, real-/imaginärdel, polär/rektangulär form, absolutbelopp, argument, konjugat, reell/komplex rot, enhetscirkel, period, amplitud, fasförskjutning, radian, ekvation, funktion, funktionsvärde, definitionsmängd, värdemängd, koefficient, nollställe, skärningspunkt, graf, asymptot, derivata, andraderivata, förändringshastighet, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, växande, avtagande, integral, integrationsgräns, primitiv funktion, längd-/area-/volymenhet, rotationskropp, intervall, sannolikhetsfördelning, normalfördelning, täthetsfunktion, standardavvikelse, polynomdivision, differential-ekvation, begynnelsevillkor
Hänvisningar	t.ex. till de Moivres formel, avståndsformeln, faktorsatsen, enhetscirkeln, trigonometriska formler, deriveringsregler, kedjeregeln, figur
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabell, angivna enheter

Provsammanställning – Kunskapskrav

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 4 i förhållande till nivå och förmågor. Poängen i denna tabell anges i samma ordning som i bedömningsanvisningen. Till exempel motsvarar 10_1 och 10_2 den första respektive andra poängen i uppgift 10.

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
B	1a		1										
	1b		1										
	2_1	1											
	2_2	1											
	3a	1											
	3b	1											
	4_1	1											
	4_2					1							
	5_1	1											
	5_2					1							
	6a	1											
	6b					1							
	7							1					
	8									1			
C	9_1				1								
	9_2				1								
	10_1		1										
	10_2		1										
	10_3					1							
	11_1							1					
	11_2							1					
	12_1							1					
	12_2							1					
	12_3								1				
	13_1						1						
	13_2						1						
	14_1								1				
	14_2								1				
	14_3												1
	15_1						1						
	15_2									1			
	16_1									1			
	16_2									1			
	16_3												1
17_1												1	
17_2												1	
17_3												1	
17_4												1	
18_1									1				
18_2												1	

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
D	19		1										
	20_1			1									
	20_2			1									
	21a			1									
	21b_1									1			
	21b_2									1			
	22a		1										
	22b_1			1									
	22b_2			1									
	22c									1			
	23_1		1										
	23_2									1			
	23_3									1			
	24_1										1		
	24_2										1		
	24_3											1	
	25_1												1
	25_2												1
	25_3												1
	26_1												1
26_2												1	
Total		7	7	5	2	3	6	8	6	2	3	6	6
Σ	61	21				23				17			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Provsammanställning – Centralt innehåll

Tabell 2 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 4 i förhållande till nivå och centralt innehåll. En lista över det centrala innehållet återfinns i slutet av detta häfte.

Delprov	Uppg.	Nivå			Centralt innehåll Kurs Ma4																						
		E	C	A	Aritmetik, algebra och förändring									Samband och förändring						Problem-lösning							
					A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	F17	F18	F19	F20	F21	P1	P3	P4							
B	1a	1	0	0						X																	
	1b	1	0	0														X									
	2	2	0	0												X											
	3a	1	0	0		X	X																				
	3b	1	0	0		X	X																				
	4	1	1	0										X													
	5	1	1	0										X													
	6a	1	0	0	X	X		X	X																		
	6b	0	1	0	X	X		X	X																		
7	0	1	0														X					X					
8	0	0	1						X																		
C	9	2	0	0						X		X															
	10	2	1	0							X																
	11	0	2	0	X		X					X															
	12	0	3	0	X		X		X													X					
	13	0	2	0					X																		
	14	0	2	1										X													
	15	0	1	1										X			X										
	16	0	0	3	X		X																				
	17	0	0	4								X										X					
18	0	0	2						X													X					
D	19	1	0	0													X										
	20	2	0	0							X						X					X					
	21a	1	0	0										X								X	X				
	21b	0	2	0							X			X									X	X			
	22a	1	0	0																		X	X	X			
	22b	2	0	0																		X	X	X			
	22c	0	1	0																		X	X	X			
	23	1	2	0																		X					
	24	0	3	0																			X	X			
	25	0	0	3																			X				
	26	0	0	2														X					X	X			
Total		21	23	17																							

Kravgränser

Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 61 poäng varav 21 E-, 23 C- och 17 A-poäng.
Observera att kravgränserna förutsätter att eleven deltagit i alla tre delprov.

Kravgräns för provbetyget

E: 15 poäng

D: 24 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå

C: 31 poäng varav 13 poäng på minst C-nivå

B: 41 poäng varav 5 poäng på A-nivå

A: 49 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Bedömningsformulär

Elev: _____ Klass: _____ Provbetyg: _____

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
B	1a												
	1b												
	2_1												
	2_2												
	3a												
	3b												
	4_1												
	4_2												
	5_1												
	5_2												
	6a												
	6b												
	7												
	8												
C	9_1												
	9_2												
	10_1												
	10_2												
	10_3												
	11_1												
	11_2												
	12_1												
	12_2												
	12_3												
	13_1												
	13_2												
	14_1												
	14_2												
	14_3												
	15_1												
	15_2												
	16_1												
16_2													
16_3													
17_1													
17_2													
17_3													
17_4													
18_1													
18_2													

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
D	19												
	20_1												
	20_2												
	21a												
	21b_1												
	21b_2												
	22a												
	22b_1												
	22b_2												
	22c												
	23_1												
	23_2												
	23_3												
	24_1												
	24_2												
	24_3												
	25_1												
	25_2												
	25_3												
26_1													
26_2													
Total													
Σ													

Total	7	7	5	2	3	6	8	6	2	3	6	6
Σ	61	21			23				17			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Bedömningsanvisningar

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

Delprov B

- | | | |
|-----------|---|-------------------|
| 1. | | Max 2/0/0 |
| a) | Korrekt svar ($\frac{\sqrt{3}}{2}$) | +1 E _P |
| b) | Korrekt svar ($2 \cos 2x$) | +1 E _P |
| 2. | | Max 2/0/0 |
| | Anger minst ett värde där funktionen inte är definierad, t ex 2 | +1 E _B |
| | med korrekt angivna ekvationer ($x = -2$ och $x = 2$) | +1 E _B |
| 3. | | Max 2/0/0 |
| a) | Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning ($-3 - 4i$) | +1 E _B |
| b) | Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning (5) | +1 E _B |
| 4. | | Max 1/1/0 |
| | Anger minst en av konstanterna A , B eller k godtagbart | +1 E _B |
| | med godtagbart svar ($y = 1,5 \sin(2x) + 1$) | +1 C _B |
| 5. | | Max 1/1/0 |
| | Anger minst en konstant godtagbart | +1 E _B |
| | med godtagbart svar ($a = -1$ och $b = 2$) | +1 C _B |
| 6. | | Max 1/1/0 |
| a) | Korrekt svar (10°) | +1 E _B |
| b) | Korrekt svar (154°) | +1 C _B |

7. **Max 0/1/0**
- Korrekt svar ($f(x) = x^2 \cdot \sin x$) +1 C_{PL}
- Kommentar:* Svar där en konstant adderats till det korrekta svaret (t ex $f(x) = x^2 \cdot \sin x + 3$) anses godtagbart.

8. **Max 0/0/1**
- Korrekt svar (A och B) +1 A_B

Delprov C

9. **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, använder sinus för dubbla vinkeln +1 E_R
 med ett enkelt resonemang som visar att VL = HL +1 E_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.






10. **Max 2/1/0**
- Godtagbar ansats, bestämmer minst en vinkel korrekt +1 E_P
 med godtagbar fortsättning, bestämmer minst två vinklar korrekt +1 E_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar +1 C_P
 ($x = 10^\circ + n \cdot 120^\circ$ eller $x = 50^\circ + n \cdot 120^\circ$)

11. **Max 0/2/0**
- Godtagbar ansats, t ex tecknar uttryck för $|z_1|$ och $|z_2|$,
 $|z_1| = \sqrt{a^2 + a^2}$ och $|z_2| = \sqrt{(a+1)^2 + (a-1)^2}$ +1 C_R
 med i övrigt godtagbart genomfört bevis +1 C_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



- 12.** **Max 0/3/0**
- Godtagbar ansats, t ex korrekt insättning av roten med korrekt förenkling
eller kommer fram till uttrycket $(x - (1 + i\sqrt{3})) \cdot (x - (1 - i\sqrt{3}))$ +1 C_{PL}
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($a = -2$ och $b = 4$) +1 C_{PL}
- Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C_K
- Se avsnittet Bedömda elevlösningar.* 
- 13.** **Max 0/2/0**
- Godtagbar ansats, t ex faktorerar ekvationen,
 $z^3 + 2z^2 + 5z + 10 = (z + 2)(z^2 + 5)$ +1 C_P
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($z = \pm i\sqrt{5}$) +1 C_P
- 14.** **Max 0/2/1**
- Godtagbart resonemang som leder till en korrekt slutsats för
 $B > 5$ *eller* $B = 5$ *eller* positiva $B < 5$ +1 C_R
- med godtagbart fortsatt resonemang som t ex leder till korrekt slutsats för
 alla positiva värden på B +1 C_R
- med ett godtagbart slutfört resonemang som leder till korrekt slutsats för alla
 värden på B (Det finns inga lösningar om $-5 < B < 5$, två lösningar om
 $B = \pm 5$ och fyra lösningar om $B < -5$ *eller* $B > 5$) +1 A_R
- Se avsnittet Bedömda elevlösningar.* 
- 15.** **Max 0/1/1**
- Godtagbar ansats, bestämmer korrekt primitiv funktion +1 C_P
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (3) +1 A_P
- 16.** **Max 0/0/3**
- Godtagbar ansats, t ex bestämmer $\text{Im } z$ +1 A_P
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar
 $(z_1 = 1 + 2i$ och $z_2 = 4 + 2i)$ +1 A_P
- Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 A_K
- Se avsnittet Bedömda elevlösningar.* 

- 17.** **Max 0/0/4**
- Godtagbar ansats, t ex bestämmer integrationsgränserna korrekt +1 A_R
 med godtagbar fortsättning, bestämmer en av areorna korrekt,
 t ex $-\frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{2}$ +1 A_R
 med i övrigt godtagbart genomfört bevis +1 A_R
 Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 A_K


Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



- 18.** **Max 0/0/2**
- Godtagbar ansats, t ex delar upp vinkeln α och inser att additionssatsen för sinus ska användas +1 A_B
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (63/65) +1 A_{PL}

Delprov D

- 19.** **Max 1/0/0**
- Godtagbart svar $(-5, 71)$ +1 E_P
- 20.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, bestämmer ett godtagbart värde på P 's x -koordinat, $x = 4,12$ +1 E_{PL}
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar $(2,66)$ +1 E_{PL}
- 21.** **Max 1/2/0**
- a) Korrekt svar $(137,5 \text{ m})$ +1 E_M
- b) Godtagbar ansats, t ex bestämmer godtagbart minst en av tidpunkterna då höjden är 40 m +1 C_M
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (19 minuter) +1 C_M

- 22.** **Max 3/1/0**
- a) Godtagbar lösning +1 E_P
- b) Godtagbar ansats, bestämmer minst en av konstanterna korrekt +1 E_M
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar +1 E_M
 ($C = 100$ och $k = -0,105$)
- c) Godtagbar lösning med godtagbart svar (22 h) +1 C_{PL}
- 23.** **Max 1/2/0**
- Godtagbar ansats, t ex bestämmer skärningspunkten mellan funktionerna +1 E_P
 med godtagbar fortsättning, t ex ställer upp godtagbart uttryck för
 areaberäkningen, $\int_0^{0,759} \sqrt{x} dx + \int_{0,759}^{2,214} (e^{\sqrt{x}} - 2x) dx$ +1 C_P
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (1,05 a.e.) +1 C_P
- Kommentar:* Svar utan enhet eller med felaktig enhet godtas.
- 24.** **Max 0/3/0**
- Godtagbar ansats, t ex bestämmer volymen under de första 25 minuterna, +1 C_M
 1666 liter
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (36 minuter) +1 C_M
- Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C_K
- Se avsnittet Bedömda elevlösningar.* 
- 25.** **Max 0/0/3**
- Godtagbar ansats, inser att volymen består av skivor med radien $9 - x^2$ +1 A_{PL}
 eller
 inser att funktionen kan förskjutas 5 enheter ”neråt” för att få rotation
 runt x -axeln
- med godtagbar fortsättning, ställer upp en korrekt integral med
 integrationsgränser, t ex $\pi \int_{-3}^3 (x^2 - 9)^2 dx$ +1 A_{PL}
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (814 v.e.) +1 A_{PL}
- Kommentar:* Svar utan enhet eller med felaktig enhet godtas.

26.

Max 0/0/2

Godtagbar ansats, t ex tecknar uttrycket $x = L \tan Ct$ +1 A_M

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($\frac{dx}{dt} = \frac{CL}{\cos^2 Ct}$) +1 A_M

Kommentar: Även svaret $\frac{dx}{dt} = \frac{CL}{\cos^2 v}$ godtas.

Bedömda elevlösningar

Uppgift 9.

Elevlösning 9.1 (1 ER)

$$\frac{\sin 2x}{2 \cos x} = \sin x$$

$$\sin 2x = 2 \cos x \cdot \sin x$$

$$2 \sin x \cos x = 2 \sin x \cos x \quad \text{v.s.v.}$$

Kommentar: Elevlösningen bygger på likheten som ska visas. Därmed bedöms lösningen inte uppfylla kraven för den andra resonemangspoängen på E-nivå.

Uppgift 11.

Elevlösning 11.1 (1 CR)

$$z_1 = a + ai$$

$$|z_1| = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2} a$$

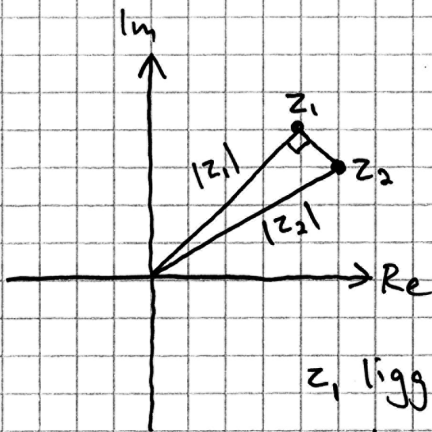
$$z_2 = (a+1) + (a-1)i$$

$$\begin{aligned} |z_2| &= \sqrt{(a+1)^2 + (a-1)^2} = \\ &= \sqrt{a^2 + 2a + 1 + a^2 - 2a + 1} = \\ &= \sqrt{2a^2 + 2} \end{aligned}$$

$$\sqrt{2} a < \sqrt{2a^2 + 2} \Rightarrow |z_1| < |z_2|$$

Kommentar: Elevlösningen innehåller ett resonemang som leder till konstaterandet att $\sqrt{2}a < \sqrt{2a^2 + 2}$ utan att detta motiveras. Därmed anses beviset inte vara godtagbart vilket gör att kraven för den andra resonemangspoängen på C-nivå inte är uppfyllda.

Elevlösning 11.2 (2 CR)



z_1 ligger på 45° -linjen.

z_2 ligger \downarrow från z_1 .

Det blir en rätvinklig triangel

där $|z_2|$ är längsta sidan

och $|z_1|$ är kortare.

Alltså: $|z_2| > |z_1|$ V.S.V.

Kommentar: Elevlösningen innehåller ett bevis som genomförs med hjälp av en grafisk tolkning av olikheten. Trots att argumentationen för att det bildas en rätvinklig triangel är vag anses lösningen uppfylla kraven för båda resonemangspoängen på C-nivå.

Uppgift 12.

Elevlösning 12.1 (2 CPL)

Om $x_1 = 1 + i\sqrt{3}$ är $x_2 = 1 - i\sqrt{3}$

dvs $x = 1 \pm i\sqrt{3}$

enligt pq-formeln är $a = -2$ och

da måste $b = 4$ för att det ska bli $\sqrt{-3}$

i pq-formeln.

Svar: $a = -2$
 $b = 4$

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften på ett knapphändigt men godtagbart sätt. När det gäller kommunikation är lösningen inte helt lätt att följa och förstå. Det saknas t ex förklaring till slutsatserna om a och b på raderna 3–5. Därmed bedöms lösningen inte uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå.

Elevlösning 12.2 (2 C_{PL} och 1 C_K)

$$x^2 + ax + b = 0$$

$$x = 1 + i\sqrt{3}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 - b} \Rightarrow \left(-\frac{a}{2}\right) = 1$$

$$\frac{a}{2} = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$a = 2 \cdot (-1) = -2$$

$$a = -2$$

$$i\sqrt{3} = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2 = 1 \quad \sqrt{3} \cdot i = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-3}$$

$$\sqrt{-3} = \sqrt{1 - b}$$

$$1 - b = -3$$

$$b = 4$$

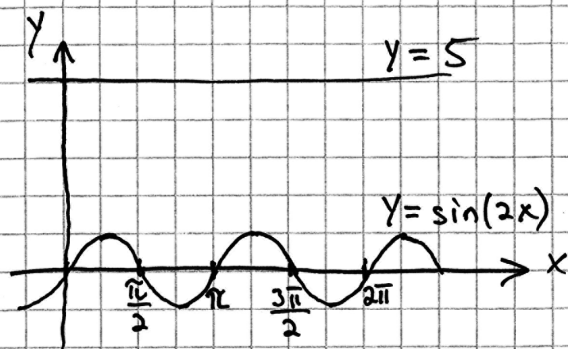
$$\text{Svar: } a = -2$$

$$b = 4$$

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet och leder fram till ett korrekt svar. Gällande kommunikation hade lösningen kunnat vara mer strukturerad men anses ändå möjlig att följa och förstå. Därmed anses lösningen nått och jämnt uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng.

Uppgift 14.

Elevlösning 14.1 (2 CR)



$$B \sin(2x) = 5 \quad 0 \leq x < 2\pi$$

B måste vara $B \geq 5$ eller $B \leq -5$ för att ekvationen ska få lösningar. Detta beror på att $\sin(2x)$ maxvärde är 1 och därför kan den inte nå 5 annars.

Om $B = 5$ kommer det att finnas två lösningar i $\frac{\pi}{4}$ och $\frac{5\pi}{4}$, om $B = -5$ (kurvan "vänds") finns två lösningar i $\frac{3\pi}{4}$ och $\frac{7\pi}{4}$.

Annars finns det alltid 4 lösningar.

Kommentar: Elevlösningen innehåller ett godtagbart resonemang om att $B \geq 5$ eller $B \leq -5$ måste gälla för att ekvationen ska få lösningar. Vidare anges ekvationens lösningar då $B = 5$ och $B = -5$. Tillsammans med figuren anses detta vara ett nätt och jämnt godtagbart resonemang för att visa att ekvationen har två lösningar för dessa värden på B . Avslutningsvis anges att det för övriga värden på B finns 4 lösningar. Denna slutsats stöds dock inte av något godtagbart resonemang. Sammantaget anses elevlösningen innehålla godtagbara resonemang med korrekta slutsatser för $-5 < B < 5$, $B = 5$ och $B = -5$. Därmed anses kraven för de två resonemangspoängen på C-nivå vara uppfyllda.

Elevlösning 14.2 (2 Cr)

Eftersom B är amplituden bestämmer den hur högt sinuskurvan går. Om $B < 5$ får vi inga lösningar.

Om $B = 5$:

$$5 \sin 2x = 5$$

$$\sin 2x = 1 \rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\rightarrow x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} \text{ och } x_2 = \frac{5\pi}{4}$$

Om $B = 5$ får vi 2 lösningar.

Om $B > 5$ får vi dubbelt så många lösningar än om $B = 5$, d.v.s. 4 lösningar. Detta för att kurvans topp (vid $\frac{\pi}{4}$ och $\frac{5\pi}{4}$) kommer överanför 5 så vi får två lösningar runt $\frac{\pi}{4}$ och två runt $\frac{5\pi}{4}$.

Kommentar: Elevlösningen innehåller ett nätt och jämnt godtagbart resonemang om amplitud som leder till korrekt slutsats för $B < 5$. För fallet $B = 5$ löses ekvationen och en korrekt slutsats att ekvationen har 2 lösningar dras. För $B > 5$ innehåller lösningen ett nätt och jämnt godtagbart resonemang om varför det blir dubbelt så många lösningar som när $B = 5$. Sammantaget anses kraven för de två resonemangspoängen på C-nivå vara uppfyllda.

Uppgift 16.

Elevlösning 16.1 (2 Ap)

$$|z|^2 = 5z - 10i \quad |z| = \sqrt{5z - 10i}$$

$$|z| \cdot |z| = 5z - 10i$$

$$a^2 + b^2 = 5(a + bi) - 10i$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z = a + bi$$

$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 + b^2 = 5z - 10i$$

$$\frac{|z|^2 + 10i}{5} = z$$

$$|z|^2 + 10i = 5z$$

$$a^2 + b^2 = 5a + 5bi - 10i \quad \leftarrow \text{Jag tar bort}$$

$$a^2 + 2^2 = 5a \Rightarrow a^2 - 5a + 4$$

$$\text{Pq ger } a = 2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 4} \Rightarrow 2,5 \pm \sqrt{2,25} \Rightarrow 2,5 \pm 1,5$$

$$a_1 = 4 \quad a_2 = 1$$

$$a^2 + b^2 = \text{bara reella tal} \Rightarrow 5bi - 10i = 0 \quad b = 2$$

Svar: Det finns 2 lösningar

$$z = 4 + 2i \quad \text{eller} \quad 1 + 2i$$

Kommentar: Elevlösningen innehåller en korrekt bestämning av ekvationens rötter. När det gäller kommunikation är lösningen bitvis ostrukturerad och innehåller ovidkommande led. Detta gör att kraven för kommunikationspoäng på A-nivå inte anses uppfyllda. Sammantaget ges lösningen två procedurpoäng på A-nivå.

Elevlösning 16.2 (2 A_P och 1 A_K)

$$|z|^2 = 5z - 10i \quad z = a + bi$$

$$|z|^2 - 5z = -10i \rightarrow a^2 + b^2 - (5a + 5bi) = -10i$$

$$-5b = -10$$

$$b = 2$$

$$a^2 + 2^2 - 5a = 0$$

$$a^2 - 5a + 4 = 0$$

$$a = 2,5 \pm \sqrt{2,25} = 2,5 \pm 1,5$$

$$a = 4, \quad a = 1$$

$$\underline{\text{Svar:}} \quad z = 4 + 2i \quad \text{eller} \quad z = 1 + 2i$$

Kommentar: Elevlösningen innehåller en korrekt lösning av ekvationen. När det gäller kommunikation är lösningen något kortfattad och förklarande text saknas. Lösningen anses ändå vara lätt att följa och förstå och uppfyller nätt och jämnt kraven för kommunikationspoäng på A-nivå.

Uppgift 17.

Elevlösning 17.1 (3 AR)

$$f(x) = x^2 + 3$$

$$g(x) = -x^3 + x^2 + kx + 3 \quad \text{där } k > 0$$

$$f(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2 + 3} = -x^3 + \cancel{x^2} + kx + \cancel{3}$$

$$0 = -x^3 + kx$$

$$0 = -x^2 + k$$

$$x_1 = \sqrt{k} \quad x_2 = -\sqrt{k}$$

$$A = \int_{-\sqrt{k}}^0 x^3 - kx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{kx^2}{2} \right] =$$

$$0 - \left(\frac{(-k^{0.5})^4}{4} - \frac{k(-k^{0.5})^2}{2} \right) = -\frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{2}$$

$$B = \int_0^{\sqrt{k}} -x^3 + kx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{kx^2}{2} \right] =$$

$$\frac{-(k^{0.5})^4}{4} + \frac{k(k^{0.5})^2}{2} = -\frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{2}$$

$$A = B = -\frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{2} \quad k \text{ spelar ingen roll}$$

V. S. V.

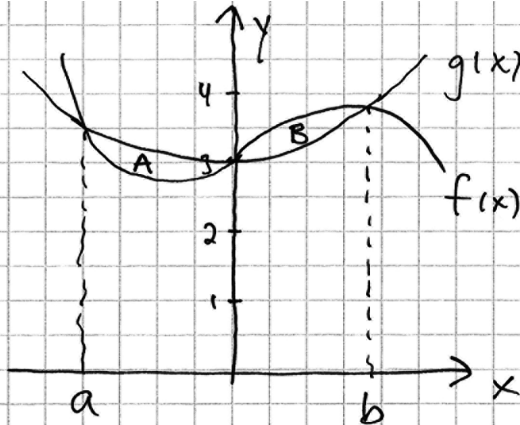
Kommentar: Elevlösningen innehåller ett bevis av att areorna är lika stora oavsett värde på k . När det gäller kommunikation så saknas dx i integralen och parentes runt integranden. Integrationsgränserna saknas vid klammrarna runt primitiva funktionen. Det framgår inte att det är skillnaden mellan funktionerna som integreras. Dessutom motiveras inte hur integrationsgränsen $x = 0$ bestämts. Därmed anses inte kraven för kommunikationspoäng på A-nivå vara uppfyllda. Sammantaget ges lösningen de tre resonemangspoängen på A-nivå.

Elevlösning 17.2 (2 A_R och 1 A_K)

$$f(x) = x^2 + 3$$

$$g(x) = -x^3 + x^2 + kx + 3$$

$$A = B$$



$$B = \int_0^b (-x^3 + x^2 + kx + 3) dx - \int_0^b (x^2 + 3) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^b (-x^3 + kx) dx$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{kx^2}{2} \right]_0^b = -\frac{b^4}{4} + \frac{kb^2}{2} - 0$$

$$A = \int_a^0 (x^2 + 3) dx - \int_a^0 (-x^3 + x^2 + kx + 3) dx$$

$$\Rightarrow \int_a^0 (x^3 - kx) dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x^4}{4} - \frac{kx^2}{2} \right]_a^0 = 0 - \left(\frac{a^4}{4} - \frac{ka^2}{2} \right) = -\frac{a^4}{4} + \frac{ka^2}{2}$$

$$-\frac{a^4}{4} + \frac{ka^2}{2} = -\frac{b^4}{4} + \frac{kb^2}{2}$$

$$a \text{ o } b = x \quad \text{när} \quad f(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow x^2 + 3 = -x^3 + x^2 + kx + 3$$

$$\Rightarrow -x^3 + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = kx \quad \Rightarrow \quad x^2 = k$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{k}$$

$$a = -\sqrt{k} \quad b = \sqrt{k}$$

forts \Rightarrow

$$-\frac{a^4}{4} + \frac{ka^2}{2} = -\frac{b^4}{4} + \frac{kb^2}{2}$$

$$a = -\sqrt{k} \quad b = \sqrt{k}$$

$$-\frac{(-k^{0,5})^4}{4} + \frac{k \cdot k}{2} = -\frac{(k^{0,5})^4}{4} + \frac{k(k^{0,5})^2}{2}$$

$$-\frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{2} = -\frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{2}$$

Svar: B är lika stor som A oavsett
värdet på k. V. S. V.

Kommentar: Elevlösningen innehåller ett resonemang som visar att areorna är lika stora. Eftersom lösningen utgår från likheten som ska visas anses inte kraven för den tredje resonemangspoängen vara uppfyllda. När det gäller kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå. En figur definierar skärningspunkter vid $x = a$ och $x = b$. Figuren visar också att kurvorna skär varandra i punkten $(0, 3)$ vilket anses stödja att $x = 0$ är den tredje integrationsgränsen. Sammantaget ges lösningen två resonemangspoäng på A-nivå och en kommunikationspoäng på A-nivå.

Uppgift 24.

Elevlösning 24.1 (2 C_M)

$$90 \cdot 10 = 900 \quad \text{efter } 10 \text{ min}$$

$$\int_{10}^{25} \frac{1000}{x} - 10 = \left[1000 \cdot \ln x - 10x \right]_{10}^{25}$$

$$1000 \cdot \ln 25 - 250 = 2968,9 \dots$$

$$1000 \cdot \ln 10 - 100 = 2202,6 \dots$$

$$2968,9 - 2202,6 = 766,3$$

$$\sim 766 + 900 = 1666$$

$$2000 - 1666 = 334$$

$$\frac{334}{30} = 11,1 \dots$$

$$\text{Svar: } \sim 36,1 \text{ minuter}$$

Kommentar: Elevlösningen innehåller en godtagbar lösning med godtagbart svar. När det gäller kommunikation anses lösningen vara svår att följa då det saknas såväl enheter i delberäkningarna som förklaringar till vad som beräknas. I integralen saknas dx och parentes runt integranden. Dessa brister gör att lösningen inte anses uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå. Sammantaget ges lösningen två modelleringspoäng på C-nivå.

Elevlösning 24.2 (2 C_M och 1 C_K)

$$90 \cdot 10 = 900 \text{ l} \quad (10 \text{ min})$$

$$\int_{10}^{25} \frac{1000}{x} - 10 = 766 \text{ l} \quad (25 - 10 = 15 \text{ min})$$

$$2000 - 900 - 766 = 334 \text{ l}$$

$$\frac{334 \text{ l}}{30 \text{ l/min}} = 11,12 \text{ min}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{liter/min} \cdot \text{min} = \text{liter} \\ y \cdot x = \text{liter} \end{array} \right)$$

$$10 \text{ min} + 15 \text{ min} + 11,12 \approx 36 \text{ min}$$

Svar: Det tar 36 minuter innan tanken innehåller 2000 liter vatten.

Kommentar: Lösningen innehåller en godtagbar bestämning av den efterfrågade tiden vilket gör att kraven för de båda modelleringspoängen är uppfyllda. När det gäller kommunikation saknas parentes och dx i integralen. Hur integralen beräknats kommenteras inte och en del förklarande text saknas. Bristen på förklaringar kompenseras av tidsangivelserna, enhetsanalysen i de tre parenteserna samt enheterna i kvoten. Därmed anses kraven för kommunikationspoäng på C-nivå nått och jämnt vara uppfyllda.

Ur ämnesplanen för matematik

Matematiken har en flertusenårig historia med bidrag från många kulturer. Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska matematiken som sådan. Kommunikation med hjälp av matematikens språk är likartad över hela världen. I takt med att informationstekniken utvecklas används matematiken i alltmer komplexa situationer. Matematik är även ett verktyg inom vetenskap och för olika yrken. Ytterst handlar matematiken om att upptäcka mönster och formulera generella samband.

Ämnets syfte

Undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar förmåga att arbeta matematiskt. Det innefattar att utveckla förståelse av matematikens begrepp och metoder samt att utveckla olika strategier för att kunna lösa matematiska problem och använda matematik i samhälls- och yrkesrelaterade situationer. I undervisningen ska eleverna ges möjlighet att utmana, fördjupa och bredda sin kreativitet och sitt matematikkunnande. Vidare ska den bidra till att eleverna utvecklar förmåga att sätta in matematiken i olika sammanhang och se dess betydelse för individ och samhälle.

Undervisningen ska innehålla varierade arbetsformer och arbetssätt, där undersökande aktiviteter utgör en del. När så är lämpligt ska undervisningen ske i relevant praxisnära miljö. Undervisningen ska ge eleverna möjlighet att kommunicera med olika uttrycksformer. Vidare ska den ge eleverna utmaningar samt erfarenhet av matematikens logik, generaliserbarhet, kreativa kvaliteter och mångfacetterade karaktär. Undervisningen ska stärka elevernas tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang samt ge utrymme åt problemlösning som både mål och medel. I undervisningen ska eleverna dessutom ges möjlighet att utveckla sin förmåga att använda digital teknik, digitala medier och även andra verktyg som kan förekomma inom karaktärsämnen.

Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att:

1. använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.
2. hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.
3. formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat.
4. tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.
5. följa, föra och bedöma matematiska resonemang.
6. kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.
7. relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.

Kunskapskrav Matematik kurs 4

Betyget E Eleven kan **översiktligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **översiktligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnen i **bekanta situationer**. I arbetet hanterar eleven **några enkla** procedurer och löser uppgifter av standardkaraktär **med viss säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av enkel karaktär**. Dessa problem inkluderar **ett fåtal** begrepp och kräver **enkla** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att tillämpa **givna** matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier och metoder.

Eleven kan föra **enkla** matematiska resonemang och värdera med **enkla** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **med inslag av** matematiska symboler och andra representationer.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **kursens innehåll** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **enkla** resonemang om exemplens relevans.

Betyget D Betyget D innebär att kunskapskraven för E och till övervägande del för C är uppfyllda.

Betyget C Eleven kan **utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnen. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade aritmetiska och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja och** tillämpa matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade** matematiska resonemang och värdera med **nyanserade** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra enkla matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med viss anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade** resonemang om exemplens relevans.

Betyget B Betyget B innebär att kunskapskraven för C och till övervägande del för A är uppfyllda.

Betyget A Eleven kan **definiera och utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **flera** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa **komplexa** matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnen. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade aritmetiska och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet och på ett effektivt sätt**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av komplex karaktär**. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. **I problemlösning upptäcker eleven generella samband som presenteras med symbolisk algebra**. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja**, tillämpa **och anpassa** matematiska modeller. Eleven kan med **nyanserade** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade och nyanserade** matematiska resonemang, värdera med **nyanserade** omdömen **och vidareutveckla** egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med god anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade och nyanserade** resonemang om exemplens relevans.

Centralt innehåll Matematik kurs 4

Undervisningen i kursen ska behandla följande centrala innehåll:

Aritmetik, algebra och geometri

- A6** Metoder för beräkningar med komplexa tal skrivna på olika former inklusive rektangulär och polär form.
- A7** Komplexa talplanet, representation av komplext tal som punkt och vektor.
- A8** Konjugat och absolutbelopp av ett komplext tal.
- A9** Användning och bevis av de Moivres formel.
- A10** Algebraiska och grafiska metoder för att lösa enkla polynomekvationer med komplexa rötter och reella polynomekvationer av högre grad, även med hjälp av faktorsatsen.
- A11** Hantering av trigonometriska uttryck samt bevis och användning av trigonometriska formler inklusive trigonometriska ettan och additionsformler.
- A12** Algebraiska och grafiska metoder för att lösa trigonometriska ekvationer.
- A13** Olika bevismetoder inom matematiken med exempel från områdena aritmetik, algebra eller geometri.

Samband och förändring

- F17** Egenskaper hos trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner och absolutbeloppet som funktion.
- F18** Skissning av grafer och tillhörande asymptoter.
- F19** Härledning och användning av deriveringsregler för trigonometriska, logaritm-, exponential- och sammansatta funktioner samt produkt och kvot av funktioner.
- F20** Algebraiska och grafiska metoder för bestämning av integraler med och utan digitala verktyg, inklusive beräkningar av storheter och sannolikhetsfördelning.
- F21** Begreppet differentialekvation och dess egenskaper i enkla tillämpningar som är relevanta för karaktärsämnen.

Problemlösning

- P1** Strategier för matematisk problemlösning inklusive användning av digitala medier och verktyg.
- P3** Matematiska problem av betydelse för samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen.
- P4** Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.