

## **Kravgränser**

Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).  
Tillsammans kan de ge 61 poäng varav 22 E-, 22 C- och 17 A-poäng.  
Observera att kravgränserna förutsätter att eleven deltagit i alla tre delprov.

Kravgräns för provbetyget

E: 15 poäng

D: 24 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå

C: 31 poäng varav 12 poäng på minst C-nivå

B: 41 poäng varav 5 poäng på A-nivå


A: 49 poäng varav 9 poäng på A-nivå

## Bedömningsanvisningar

*Exempel* på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

### Delprov B

- |           |  |                    |
|-----------|--|--------------------|
| <b>1.</b> |  | <b>Max 2/0/0</b>   |
| a)        | Korrekt svar (8)                           | +1 E <sub>B</sub>  |
| b)        | Korrekt svar ( $f'(x) = 20 \cos 4x$ )      | +1 E <sub>P</sub>  |
| <b>2.</b> |  | <b>Max 2/0/0</b>   |
| a)        | Godtagbart markerad punkt ( $2 - 3i$ )     | +1 E <sub>B</sub>  |
| b)        | Korrekt svar (13)                          | +1 E <sub>B</sub>  |
| <b>3.</b> |  | <b>Max 1/0/0</b>   |
|           | Godtagbart svar (2)                        | +1 E <sub>B</sub>  |
| <b>4.</b> |  | <b>Max 2/0/0</b>   |
| a)        | Korrekt svar (3,5)                         | +1 E <sub>B</sub>  |
| b)        | Korrekt svar $\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ | +1 E <sub>B</sub>  |
| <b>5.</b> |  | <b>Max 0/2/0</b>   |
| a)        | Korrekt svar (D, A och C)                  | +1 C <sub>B</sub>  |
| b)        | Godtagbart svar ( $y = \sin \frac{x}{2}$ ) | +1 C <sub>B</sub>  |
| <b>6.</b> |  | <b>Max 0/1/0</b>   |
|           | Korrekt svar (5)                           | +1 C <sub>PL</sub> |


7. **Max 0/1/0**  
 Godtagbart skissad graf +1 C<sub>B</sub>  
*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.* 
8. **Max 0/0/1**  
 Korrekt svar (t ex  $\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ$ ) +1 A<sub>B</sub>
9. **Max 0/0/1**  
 Korrekt svar (Alternativ C: 0,5) +1 A<sub>B</sub>
10. **Max 0/0/1**  
 Korrekt svar (t ex  $f(x) = 2(x^2 + 1)^6$ ) +1 A<sub>PL</sub>

**Delprov C**

11. **Max 2/0/0**  
 Godtagbar ansats, förlänger med nämnarens konjugat +1 E<sub>P</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $4 + i$ ) +1 E<sub>P</sub>
12. **Max 2/1/0**  
 Godtagbar ansats, bestämmer minst en lösning till ekvationen korrekt +1 E<sub>P</sub>  
 med godtagbar fortsättning, bestämmer minst två lösningar till ekvationen korrekt, t ex  $x = 20^\circ + n \cdot 120^\circ$  +1 E<sub>P</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar  
 ( $x = 20^\circ + n \cdot 120^\circ$  och  $x = 40^\circ + n \cdot 120^\circ$ ) +1 C<sub>P</sub>
13. **Max 2/0/0**  
 Godtagbar ansats, t ex skriver om täljaren med trigonometriska ettan +1 E<sub>R</sub>  
 med i övrigt godtagbart slutfört bevis +1 E<sub>R</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



- 14.** **Max 2/1/0**
- Godtagbar ansats, t ex tecknar en ekvation för bestämning av  $a$ ,
- $$\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \frac{1}{2}$$
- +1 E<sub>PL</sub>
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar  $\left(\frac{\pi}{6}\right)$  +1 E<sub>PL</sub>
- Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C<sub>K</sub>
- Se avsnittet Bedömda elevlösningar.* 
- 15.** **Max 0/3/0**
- Godtagbar ansats, t ex bestämmer derivatan korrekt,
- $$I'(p) = 2000(1 - 0,05p)e^{-0,05p}$$
- +1 C<sub>P</sub>
- med godtagbar fortsättning, t ex bestämmer derivatans nollställe,  $p = 20$  +1 C<sub>P</sub>
- med i övrigt godtagbar lösning, inklusive verifiering av maximum, med korrekt slutsats ("Ja, 20 kr") +1 C<sub>R</sub>
- 16.** **Max 0/2/0**
- Godtagbar ansats, visar att Parhams *eller* Aidas förslag är en lösning till differentialekvationen +1 C<sub>R</sub>
- med i övrigt välgrundat resonemang som stödjer slutsatsen att ingen har fel +1 C<sub>R</sub>
- 17.** **Max 0/1/1**
- Godtagbar ansats, t ex ställer upp en korrekt integral med gränser,
- $$\int_0^{\sqrt{h}} (h - x^2) \, dx$$
- +1 C<sub>PL</sub>
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (4) +1 A<sub>PL</sub>
- 18.** **Max 0/0/2**
- Godtagbar ansats, t ex gör omskrivningen +1 A<sub>R</sub>
- $$\sin 345^\circ = -\sin 15^\circ = -\sin(45^\circ - 30^\circ)$$
- med i övrigt godtagbart slutfört bevis +1 A<sub>R</sub>

- 19.** **Max 0/0/2**
- Godtagbar ansats, skriver om exponenten med formeln för dubbla vinkeln +1 A<sub>PL</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $e^{-\frac{1}{2}}$ ) +1 A<sub>PL</sub>

- 20.** **Max 0/0/2**
- Godtagbar ansats, t ex resonerar korrekt om vad som skiljer graferna för stora  $x$  +1 A<sub>R</sub>  
 med ett i övrigt välgrundat och nyanserat resonemang som leder till korrekt slutsats ( $f_1: A, f_2: C, f_3: D, f_4: B$ ) +1 A<sub>R</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



### Delprov D

- 21.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, t ex bestämmer  $|z|$  +1 E<sub>P</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ( $z = 5(\cos 127^\circ + i \sin 127^\circ)$ ) +1 E<sub>P</sub>

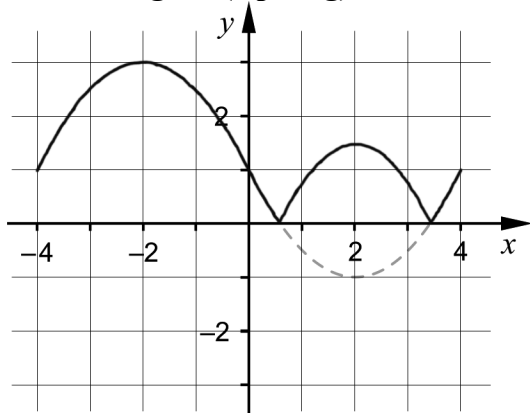
- 22.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, anger att totala regnmängden bestäms av  $\int_0^{10} x \sin \frac{\pi x}{10} dx$  +1 E<sub>M</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (32 mm) +1 E<sub>M</sub>

- 23.** **Max 2/1/0**
- Godtagbar ansats, t ex bestämmer  $x$ -koordinaten för skärningspunkten mellan kurvorna,  $x \approx 0,9197$  +1 E<sub>PL</sub>  
 med korrekt tecknat uttryck för bestämning av någon relevant area,  
 t ex  $\int_{0,5}^{0,9197} (4x - 2) dx$  +1 E<sub>PL</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (1,06 a.e.) +1 C<sub>PL</sub>

## Bedömda elevlösningar

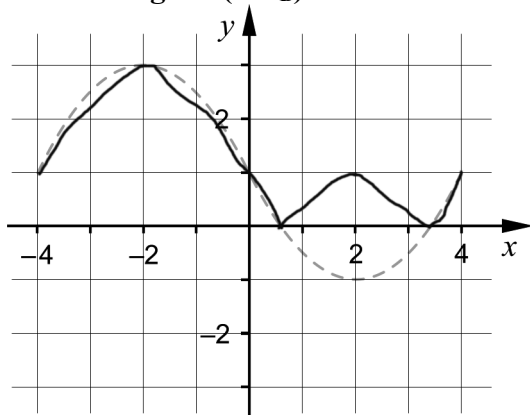
### Uppgift 7.

#### Elevlösning 7.1 (0 poäng)



*Kommentar:* Skissen är snyggt ritad men i intervallet runt  $x = 2$  avviker den för mycket från den korrekta kurvan och från punkten  $(2, 1)$ . Därmed ges lösningen noll poäng.

#### Elevlösning 7.2 (1 C<sub>B</sub>)



*Kommentar:* Skissen är något kantig men visar i grova drag hur den korrekta grafen ser ut. Lösningen anses nätt och jämnt uppfylla kraven för begrepps-poäng på C-nivå.

## Uppgift 13.

## Elevlösning 13.1 (1 ER)

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \tan x$$

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$1 - \cos^2 x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \sin x \cos x$$

$$1 - \cos^2 x = \sin^2 x \quad \text{trig. ettan.}$$

$$\sin^2 x = \sin^2 x$$

$$VL = HL \quad \text{VSV.}$$

*Kommentar:* Elevlösningen bygger från och med rad 3 på likheten som ska visas. Lösningen bedöms därmed inte uppfylla kraven för den andra resonemangspoängen på E-nivå.

## Uppgift 14.

Elevlösning 14.1 (2 E<sub>PL</sub>)

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \left[ \sin x \right]_x^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin x = 1 - \sin x$$

$$a = \frac{\pi}{6}$$

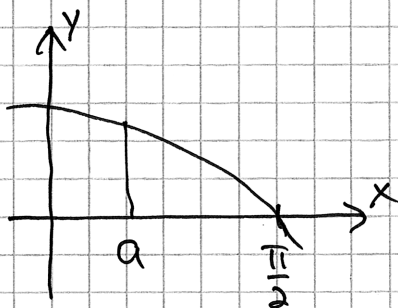
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \left[ \sin x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{6} = 1 - 0,5 = 0,5 = \frac{1}{2} \text{ a.e.}$$

*Kommentar:* Elevlösningen innehåller en förenkling av integralen och en bestämning av värdet på  $a$ . Att värdet är korrekt verifieras sedan. Detta gör att lösningen uppfyller kraven för de båda problemlösningspoängen. När det gäller kommunikation så har lösningen några brister,  $x$  används i två betydelser på rad 1,  $a = \pi/6$  konstateras utan motivering och svar saknas.

Dessa brister gör att lösningen inte anses uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå.

Elevlösning 14.2 (1 E<sub>PL</sub> och 1 C<sub>K</sub>)

$$y = \cos x$$



Bestäm  $a$  så att områdets area blir  $\frac{1}{2}$  a.e.

$$\int_a^{\pi/2} (\cos x) dx = \left[ \sin x \right]_a^{\pi/2}$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(a)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(a) = 0,5$$

$$\sin(a) = 1 - 0,5$$

$$a = \sin^{-1}(0,5)$$

$$\text{Svar: } a = \frac{5\pi}{6} \text{ eller } a = \frac{\pi}{6}$$

*Kommentar:* Elevlösningen är korrekt fram till slutet då två alternativa värden på  $a$  ges i svaret. Det gör att lösningen inte uppfyller kraven för den andra problemlösningspoängen. När det gäller kommunikation är lösningen möjlig att följa och förstå och det matematiska språket i huvudsak korrekt. Det felaktiga svaret anses inte påverka bedömningen av kommunikationen. Sammantaget ges lösningen en problemlösningspoäng på E-nivå och en kommunikationspoäng på C-nivå.



## Uppgift 20.

## Elevlösning 20.1 (2 AR)

För större värden på  $x$ , kommer  $x$ -termen resp.  $3x$ -termen att dominera.  $y = 3x$  ger brantare lutning än  $y = x$ , och vi ser att  $B$  o  $C$  har brantare lutning än  $A$  o  $D$  vid större  $x$ .

Dessa tillhör då  $f_2$  o  $f_4$ .  $3x$ -termen kommer börja dominera vid lägre  $x$  för  $f_4$  än för  $f_2$ , då  $\frac{1}{3x}$  blir litet vid ett lägre  $x$  än  $\frac{1}{x}$ . Därför är  $B$   $f_4$  och  $C$   $f_2$ .

Då kommer  $A$  o  $D$  tillhöra  $f_1$  o  $f_3$ , och vi ser också att deras grafer är mindre branta när  $x$ -termen dominerar. Samma resonemang om  $\frac{1}{x}$ -termen o  $\frac{1}{3x}$ -termen gäller för dessa funktioner, och vi får att  $A$  är  $f_1$ , och  $D$  är  $f_3$ .

Svar:  $A - f_1$ ,  $B - f_4$ ,  $C - f_2$ ,  $D - f_3$

*Kommentar:* Elevlösningen innehåller ett resonemang som på ett entydigt sätt visar hur varje funktion hänger ihop med respektive graf. Även om lösningen innehåller någon del som inte är helt välformulerad, ”då  $\frac{1}{3x}$  blir litet vid ett lägre  $x$  än  $\frac{1}{x}$ ”, bedöms lösningen uppfylla kraven för båda resonemangspoängen på A-nivå.

## Elevlösning 20.2 (2 AR)

De som lutar starkast upp är de som

har  $y = \frac{1}{bx} + x \cdot 3$ , alltså B och C.

Det ges då också att de andra är de

med  $y = \frac{1}{bx} + x$ .

De som går långt ned är de som har ett

litet värde av  $\frac{1}{bx}$ . Insättning av 0,5 ger

$$\text{att } \frac{1}{0,5} = 2 \quad \frac{1}{3 \cdot 0,5} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} < 2 \quad \text{ger att}$$

$$A = f_1$$

$$C = f_2$$

$$D = f_3$$

$$B = f_4$$

*Kommentar:* Lösningen innehåller ett korrekt resonemang som identifierar varje funktions graf. Trots att lösningen innehåller något vaga formuleringar såsom "lutar starkast upp" och "som går långt ned" bedöms kraven för den andra resonemangspoängen på A-nivå nått och jämnt vara uppfyllda.