Part B	Problems 1–12 which only require answers.
Part C	Problems 13–20 which require complete solutions.
Test time	150 minutes for Part B and Part C together.
Resources	Formula sheet and ruler.

The test consists of three written parts (Part B, Part C and Part D).
Together they give a total of 60 points consisting of
22 E-, 21 C- and 17 A-points.

Level requirements for test grades
E: 14 points
D: 23 points of which 7 points on at least C-level
C: 30 points of which 12 points on at least C-level
B: 39 points of which 5 points on A-level
A: 47 points of which 9 points on A-level

The number of points you can get for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge levels (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled *"Only answer is required"* you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

Name: ____

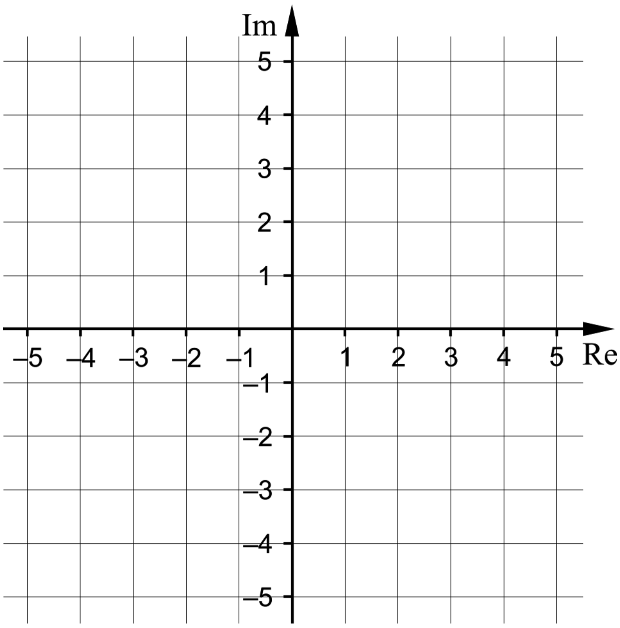
Date of birth: ____________________________________

Educational programme: ____________________________

Part B: Digital resources are not allowed. *Only answer is required*. Write your answers in the test booklet.

1. Write the angle $18°$ in radians. ______________________ (1/0/0)

2. In the complex plane, mark one number z for which it holds that $\text{Re}(z) = 0$ and $|z| = 2$



(1/0/0)

3. Solve the equation $z^3 - 6z^2 + 13z = 0$

$z_1 =$ ______________________

$z_2 =$ ______________________

$z_3 =$ ______________________ (2/0/0)

4. Write down a complex number z in the form $z = a + b\text{i}$ that satisfies the condition $\arg(z) = 135°$ ______________________ (1/0/0)

5. The complex number $z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \text{i}\sin\frac{2\pi}{7}\right)$ is given.

Determine z^3 ______________________ (1/0/0)

6. There are many non-real numbers z for which it holds that $z+\overline{z}=-10$
Write down one such non-real number z ____________________ (1/0/0)

7. The function $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}+\dfrac{7}{8}$ has two vertical and one horizontal asymptote.
Write down the equations of the three asymptotes. ____________________

____

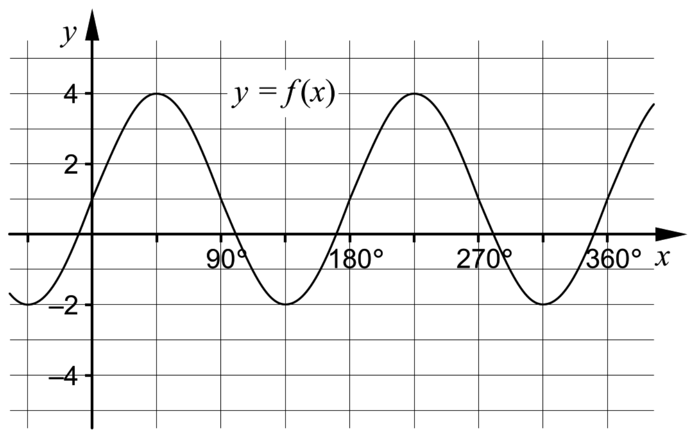
____________________ (2/0/0)

8. Differentiate

a) $f(x)=2x\cdot\sin x$ ____________________ (1/0/0)

b) $g(x)=\dfrac{e^x}{x}$ ____________________ (0/1/0)

9. The figure shows the graph of a trigonometric function f.



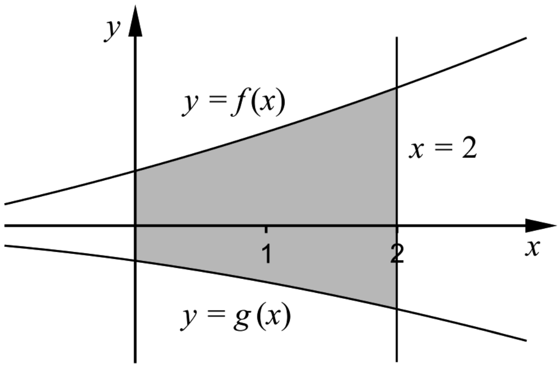
a) The function can be written $f(x)=A\sin(kx)+B$.
Determine the constants A, B and k. $A=$ ____________________

$B=$ ____________________

$k=$ ____________________ (1/1/0)

b) The function can also be written $f(x)=A\cos(kx+v)+B$ where A, B and k have the same values as in task a).
Determine a value of the constant v. $v=$ ____________________ (0/0/1)

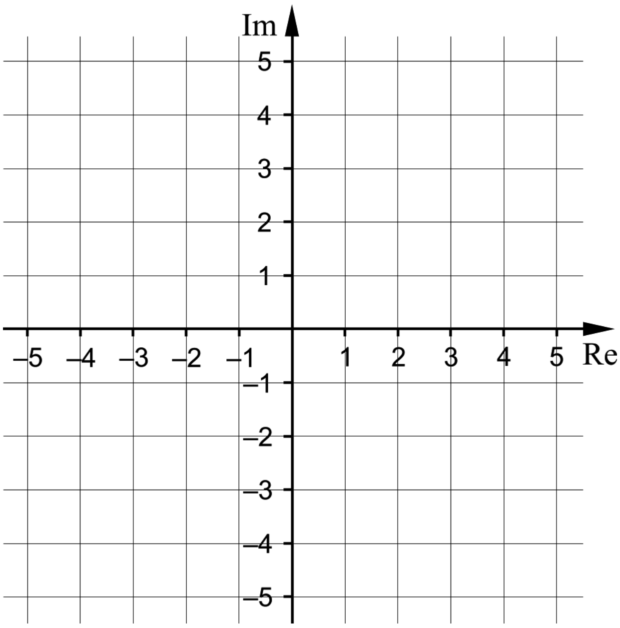
10. The shaded region in the figure is bounded by the graphs of the functions f and g, the line $x = 2$ and the y-axis.
The area of the region is 16 a.u.



It holds for the function f that $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 10$

Evaluate $\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$ ____________________ (0/1/0)

11. In the complex plane, mark all z that satisfy the condition $|z+\bar{z}| = |z-\bar{z}|$.



(0/0/2)

12. Give an example of a trigonometric function f in the form $f(x) = A\sin kx$

that satisfies $\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ ____________________ (0/0/1)

Part C: Digital resources are not allowed. Write down your solutions on separate sheets of paper.

13. Calculate $\frac{20}{3+\mathrm{i}}$ and answer in the form $a+b\mathrm{i}$. (2/0/0)

14. Determine the constant a so that $y=2\mathrm{e}^{3x}$ becomes a solution to the differential equation $y'+ay=0$ (2/0/0)

15. It holds for the angle v that $\sin v=\frac{4}{5}$ and $0° < v < 90°$
Determine the exact value of $\cos(v+45°)$. (0/3/0)

16. The graph of $f(x)=(2x-3)^5$ has a tangent at the point where $f(x)=1$
Determine the equation of the tangent. (0/3/0)

17. Show that $g(x)=\sin^4 x$ is an antiderivative of $f(x)=2\sin^2 x\cdot\sin 2x$ (0/2/0)

18. In a microwave oven, there is a circular rotating plate. A glass is placed on the plate according to figure 1.

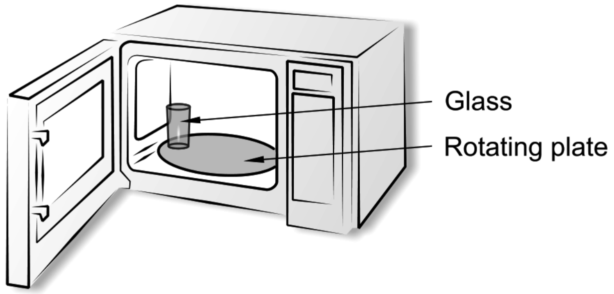


Figure 1

When the microwave oven is running, the plate is rotating at a constant speed. The distance y cm from the centre of the glass to the microwave oven door is described by the function $y(t) = 17.0 - 12.5\cos\left(\frac{\pi}{6}(t+3)\right)$

where t is the time in seconds. At $t = 0$, the glass is at the far left in the microwave oven, see figure 2.

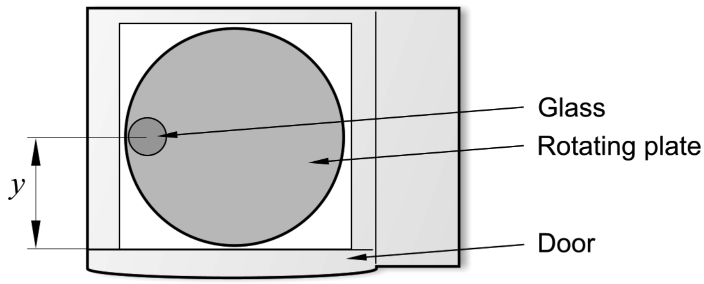


Figure 2 Cross section of microwave oven seen from above.
Placement of the glass att t = 0

a) Determine the largest distance from the centre of the glass to the microwave oven door. *Only answer is required* (1/0/0)

b) Determine how long it takes for the glass to rotate one lap in the microwave oven. (0/1/0)

The glass rotates either clockwise or anti-clockwise. See figure 3.

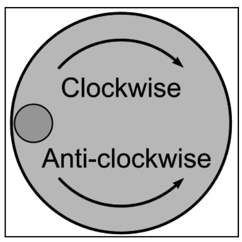


Figure 3

c) Investigate which way the glass rotates in this microwave oven. (0/0/2)

19. Solve the equation $\tan 2x \cdot \tan x = \tan x$ (0/0/2)

20. Let $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + \frac{1}{4}$

Show that $f(x) \geq 0$ for all x. (0/0/2)

Part D	Problems 21–28 which require complete solutions.
Test time	120 minutes.
Resources	Digital resources, formula sheet and ruler.

The test consists of three written parts (Part B, Part C and Part D).
Together they give a total of 60 points consisting of
22 E-, 21 C- and 17 A-points.

Level requirements for test grades
E: 14 points
D: 23 points of which 7 points on at least C-level
C: 30 points of which 12 points on at least C-level
B: 39 points of which 5 points on A-level
A: 47 points of which 9 points on A-level

The number of points you can get for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge levels (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled *“Only answer is required”* you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures and show how you use your digital resources.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

Name: ____

Date of birth: ____

Educational programme: ____

Part D: Digital resources are allowed. Write down your solutions on separate sheets of paper.

21. Determine the largest root of the equation $\sin x + \cos(3.6x) = 0$ on the interval $0° < x < 180°$
Write your answer to at least three significant figures. (2/0/0)

22. Rasmus studies the graphs of $y = 3\sin x$ and $y = 2\cos x$. He notices that the largest values are 3 and 2, respectively. He then concludes that the largest value of $y = 3\sin x + 2\cos x$ must be $3 + 2 = 5$

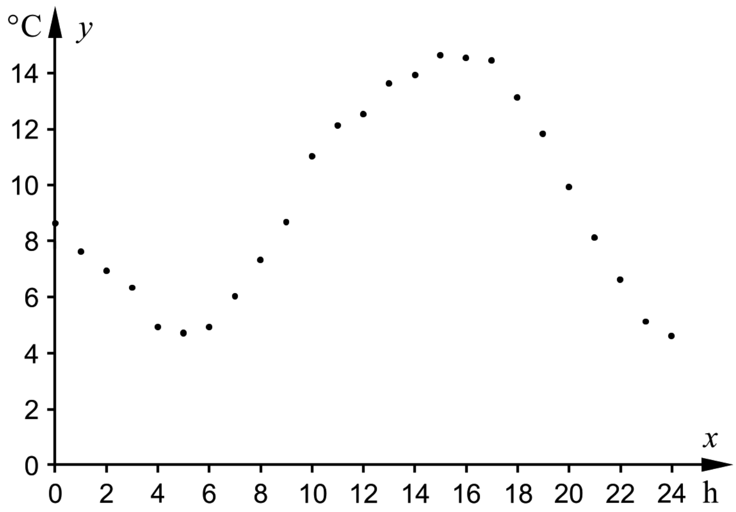
Rasmus checks this by drawing the graph of $y = 3\sin x + 2\cos x$ on his graphic calculator and then discovers that the largest value is less than 5

Use the graphs of $y = 3\sin x$ and $y = 2\cos x$ to explain why the largest value of $y = 3\sin x + 2\cos x$ is not 5 (1/1/0)

23. One of the SMHI weather observation stations is located in Torup. It measures the temperature once per hour.

If the daily (i.e. 24 h) mean temperature exceeds 10 °C for five consecutive days, the summer is considered to have started.

During the four days, April 20–23 2014, the daily mean temperature exceeded 10 °C in Torup. The diagram shows the temperatures measured on April 24.



According to a simplified model, the temperature during this 24 hour period can be described by the function

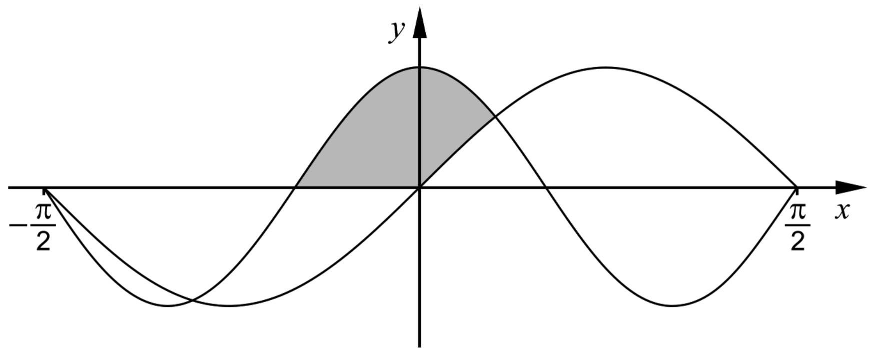
$$f(x) = -0.0079x^3 + 0.238x^2 - 1.43x + 8.2 \qquad 0 \le x \le 24$$

where $f(x)$ is the temperature in °C and x is the time in hours after 0:00

> Fact box: If the temperature is given by $f(x)$, the mean temperature of the time interval $a \le x \le b$ can be calculated the following way:
> $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

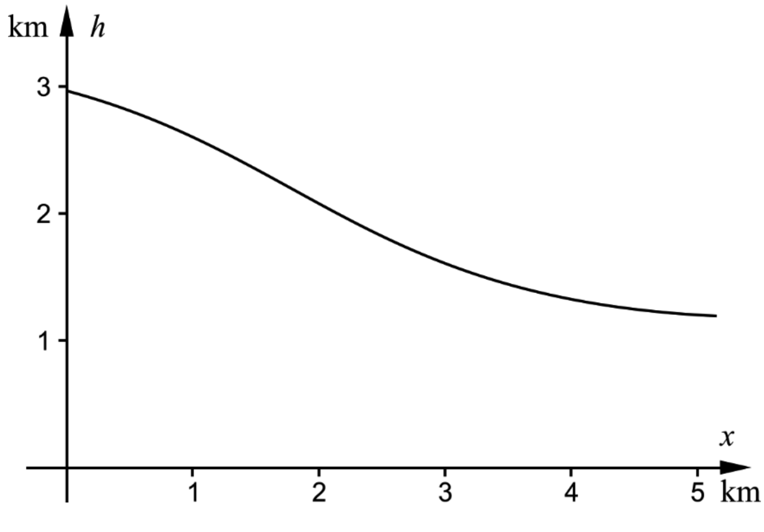
Decide whether the summer had started in Torup by determining the daily mean average temperature on April 24 by using the function. (2/0/0)

24. The figure shows a coordinate system where the curves $y = \cos 3x$ and $y = \sin 2x$ are drawn on the interval $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$



Calculate the area of the shaded region.
Write your answer to at least two significant figures. (1/3/0)

25. A company is building a cabin in the Alps and wants to know the slope of the hill. According to a simplified model, the shape of the hill can be described by the relation $h(x) = 4.1 - \frac{5+3e^x}{6+e^x}$ where $h(x)$ is the height in km above sea level and x is the horizontal distance in km.



The company is building the cabin at a part of the hill that is 1.4 km above sea level. Calculate the slope of the hill where the cabin will be built. Answer to at least two significant figures. (0/2/0)

26. A company wants to control the life span of a certain kind of lamps. The time until a lamp is broken has turned out to be a random variable with a probability density function $f(x) = \dfrac{e^{-x/24}}{24}$, $x \geq 0$ where x is the time in months that the lamp is in use.

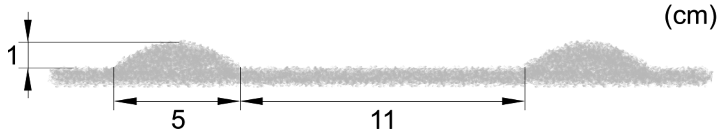
a) Determine the probability that a randomly chosen lamp breaks during the first 3 months of usage. (0/2/0)

b) Assume that three lamps are chosen at random. Determine the probability for all three lamps being unbroken after 6 months of usage. (0/0/2)

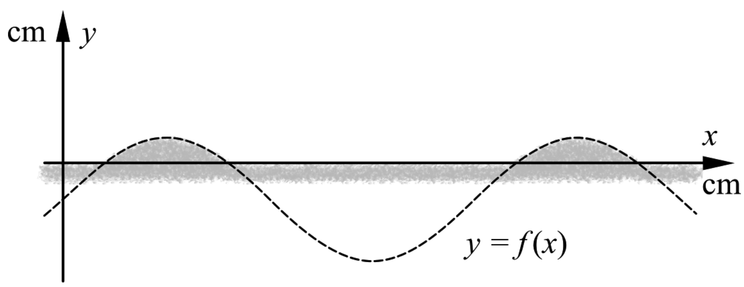
27. Investigate if the polynomial $p(x) = x^5 + a^4x^4 - x^3 + a^2x^2 + x + 1$ is divisible by $x - 1$ for any real value of the constant a. (0/0/2)

28. On the seabed near sandy beaches, periodic patterns of mounds are sometimes formed in the sand.

Assume that the height of a mound is 1 cm, the width is 5 cm and the distance between two mounds is 11 cm. See figure below.



According to a simplified model, each mound follows the top of a sine curve given by the function $f(x) = A\sin(kx) - d$ where A, k and d are positive constants. See figure below.



a) Determine the value of the constant k (0/1/0)

b) Determine the value of the constants A and d. (0/0/3)

Innehållsförteckning

Inledning

Det här häftet ska användas vid bedömningen och betygssättningen av det nationella provet i matematik 4. Häftet består av 5 kapitel. Inledningsvis finns information om bedömningen och betygssättningen av provet (kapitel 1). Sedan följer anvisningar för att bedöma samtliga skriftliga delprov (kapitel 2). Därefter finns ett kapitel med exempel på bedömda elevlösningar (kapitel 3) och ett kapitel med instruktioner för sammanvägningen till ett provbetyg (kapitel 4). Det avslutande kapitlet innehåller kopieringsunderlag samt hänvisningar till webbmaterial (kapitel 5).

1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 4

Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsmodeller

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt tre olika modeller. Avvikelser från dessa kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.

Modell 1:

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (…)	+1 E_P

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2:

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med korrekt bestämning av …	+1 E_P
Godtagbar verifiering av …	+1 E_P

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (3/0/0). I detta exempel är den tredje poängen oberoende av den andra poängen. Det indikeras med att den tredje raden inleds med stor bokstav. Det innebär att den tredje poängen kan falla ut även om den andra poängen inte gör det.

Modell 3:

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. … 1 E_R	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. … 1 E_R och 1 C_R	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. … 1 E_R, 1 C_R och 1 A_R

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\approx$, $\pm$, $\sqrt{\ }$, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, x, y, $(\ )$, $[\ ]$, $\int$, $\mathrm{d}x$, gradtecken, index, lim, VL, HL, $\sin v$, $\sin^2 v$
Termer	t.ex. komplext tal, komplext talplan, real-/imaginärdel, polär/rektangulär form, absolutbelopp, argument, konjugat, reell/komplex rot, enhetscirkel, period, amplitud, fasförskjutning, radian, ekvation, funktion, funktionsvärde, definitionsmängd, värdemängd, koefficient, nollställe, skärningspunkt, graf, asymptot, derivata, andraderivata, förändringshastighet, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, växande, avtagande, integral, integrationsgräns, primitiv funktion, längd-/area-/volymenhet, rotationskropp, intervall, sannolikhetsfördelning, normalfördelning, täthetsfunktion, standardavvikelse, polynomdivision, differentialekvation, begynnelsevillkor
Hänvisningar	t.ex. till de Moivres formel, avståndsformeln, faktorsatsen, enhetscirkeln, trigonometriska formler, deriveringsregler, kedjeregeln, figur
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

2. Bedömningsanvisningar

I det här kapitlet finns anvisningar för hur provet ska bedömas.

Läsanvisning

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om exempel på bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en hänvisning.

Instruktioner för bedömning av delprov B

1.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar ($\frac{\pi}{10}$)	+1 E_B
2.		**Max 1/0/0**
	Godtagbar markering (t ex $z = 2i$)	+1 E_B
3.		**Max 2/0/0**
	Anger minst två korrekta rötter	+1 E_P
	med korrekt svar ($z_1 = 0,\ z_2 = 3 + 2i$ och $z_3 = 3 - 2i$)	+1 E_P
4.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (t ex $-1 + i$)	+1 E_B
5.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar ($8(\cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7})$)	+1 E_B
6.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (t ex $z = -5 + i$)	+1 E_{PL}

7. **Max 2/0/0**

Anger minst en korrekt ekvation +1 E_B

med korrekt svar ($x=3$, $x=-3$ och $y=\frac{7}{8}$) +1 E_B

8. **Max 1/1/0**

a) Korrekt svar ($f'(x)=2\sin x+2x\cos x$) +1 E_P

b) Korrekt svar $\left(g'(x)=\frac{xe^x-e^x}{x^2}\right)$ +1 C_P

9. **Max 1/1/1**

a) Anger utifrån godtagbar avläsning minst en korrekt konstant +1 E_B

med korrekt svar ($A=3$, $B=1$ och $k=2$) +1 C_B

b) Korrekt svar (t ex $v=-90°$) +1 A_B

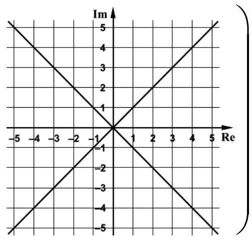
10. **Max 0/1/0**

Korrekt svar (-6) +1 C_{PL}

11. **Max 0/0/2**

Markering av minst två godtagbara punkter +1 A_B

med godtagbart svar



+1 A_{PL}

12. **Max 0/0/1**

Korrekt svar (t ex $f(x)=\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}$) +1 A_{PL}

Instruktioner för bedömning av delprov C

13. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, förlänger med konjugatet	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($6-2i$)	+1 E_P

14. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t ex deriverar och tecknar ekvationen $6e^{3x}+2ae^{3x}=0$	+1 E_{PL}
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($a=-3$)	+1 E_{PL}

15. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, bestämmer $\cos v = \frac{3}{5}$ *eller* kommer fram till $\cos v \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin v \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ med hjälp av additionssatsen	+1 C_P
med godtagbar fortsättning, bestämmer $\cos v = \frac{3}{5}$ *och* kommer fram till $\cos v \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin v \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ med hjälp av additionssatsen	+1 C_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($-\frac{1}{5\sqrt{2}}$)	+1 C_P

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

16. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, bestämmer x-värdet korrekt, $x=2$, *och* bestämmer $f'(x)$ korrekt, $f'(x)=10(2x-3)^4$	+1 C_{PL}
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($y=10x-19$)	+1 C_{PL}
Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5	+1 C_K

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

17. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t ex deriverar $g(x)$ korrekt +1 C_R

med ett i övrigt godtagbart bevis +1 C_R

18. **Max 1/1/2**

a) Korrekt svar (29,5 cm) +1 E_M

b) Godtagbar lösning med korrekt svar (12 s) +1 C_M

c) Godtagbar lösning med korrekt svar (medurs) +1 A_M

Lösningen (deluppgift b och c) kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 A_K

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

19. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, t ex skriver om ekvationen till $(\tan 2x - 1) \cdot \tan x = 0$ och tecknar de två ekvationerna $\tan 2x - 1 = 0$ och $\tan x = 0$ +1 A_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x = n \cdot 180°$ och $x = 22{,}5° + n \cdot 90°$) +1 A_P

20. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, bestämmer derivatans nollställe *eller*

skriver om funktionen som $f(x) = \left(e^x - \frac{1}{2}\right)^2$ +1 A_R

med ett i övrigt godtagbart bevis +1 A_R

Instruktioner för bedömning av delprov D

21. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t ex skissar kurvan $y = \sin x + \cos(3{,}6x)$ *eller* beskriver hur räknaren kan användas för att beräkna svaret numeriskt +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($173°$) +1 E_P

22. **Max 1/1/0**

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang där kurvornas allmänna egenskaper jämförs, t ex ”Sinus- och cosinuskurvorna är förskjutna i förhållande till varandra.” 1 E_R	Godtagbart välgrundat resonemang som förklarar varför största värdet inte kan vara 5, t ex ”Maximipunkterna infaller vid olika x-värden.” 1 E_R och 1 C_R	

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

23. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, ställer upp integralen med korrekta gränser,

$$\frac{1}{24-0}\int_{0}^{24}(-0{,}0079x^3+0{,}238x^2-1{,}43x+8{,}2)\,\mathrm{d}x$$ +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (t ex ”Nej, sommaren hade inte kommit eftersom medeltemperaturen var 9,4 °C.”) +1 E_M

24. **Max 1/3/0**

Godtagbar ansats, t ex bestämmer x-koordinaterna för skärningspunkterna, $-0{,}524$ och $0{,}314$ +1 E_P

med godtagbar fortsättning, ställer upp ett korrekt uttryck för arean,

t ex $\int_{-0{,}524}^{0}\cos 3x\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{0{,}314}(\cos 3x-\sin 2x)\,\mathrm{d}x$ +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (0,51 a.e.) +1 C_P

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 C_K

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

25. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t ex löser ekvationen $h(x) = 1,4$ +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($-0,26$) +1 C_M

Kommentar: Även svaret 0,26 eller motsvarande svar, t ex i procent eller grader, anses vara godtagbart.

26. **Max 0/2/2**

a) Godtagbar ansats, t ex ställer upp korrekt integraluttryck för den sökta sannolikheten +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (0,12) +1 C_M

b) Godtagbar ansats, t ex bestämmer sannolikheten att en lampa är hel efter 6 månader, 0,779 +1 A_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (0,47) +1 A_M

27. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, t ex utför divisionen $\dfrac{p(x)}{x-1}$ *eller*
bestämmer $p(1)$ och sätter $1 + a^4 - 1 + a^2 + 1 + 1 = 0$ +1 A_R

med ett godtagbart slutfört resonemang som
visar att divisionen $\dfrac{p(x)}{x-1}$ ger en rest $\neq 0$ för alla a *eller*
visar att $p(1) \neq 0$ för alla a och drar slutsatsen att polynomet inte är delbart med $x-1$ för något reellt värde på a +1 A_R

28. **Max 0/1/3**

a) Godtagbar lösning med godtagbart svar (0,39) +1 C_B

Kommentar: Vid räkning med grader fås svaret 22,5 vilket också anses godtagbart.

b) Godtagbar ansats, t ex kommer fram till sambandet $d = A - 1$ *eller*
bestämmer något av nollställena $x_1 = 1,5$ eller $x_2 = 6,5$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($A = 2,25,\ d = 1,25$) +1 A_{PL}

Lösningen (deluppgift a och b) kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 A_K

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

3. Exempel på bedömda elevlösningar

Uppgift 15

Elevlösningsexempel 15.1 (3 C_P)

Trig. ettan $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$

$$\cos^2 v = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\cos^2 v = \frac{9}{25}$$

$$\cos v = \frac{3}{5}$$

$$\cos(v + 45°) = \cos v \cdot \cos 45° - \sin v \cdot \sin 45° =$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{5\sqrt{2}}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller en godtagbar bestämning av $\cos(v + 45°)$. Vid bestämningen av $\cos v$ framgår det inte att $\cos v$ kan ha två värden där den negativa lösningen kan förkastas. Eftersom det givna intervallet är $0° < v < 90°$ anses lösningen, trots att endast positiva $\cos v$ behandlas, nätt och jämnt uppfylla kraven för de tre procedurpoängen.

Uppgift 16

Elevlösningsexempel 16.1 (2 C_{PL} och 1 C_K)

$f(x) = (2x-3)^5$ $\quad f(x) = 1$

$x = 2 \quad \rightarrow \quad f(2) = (2\cdot 2-3)^5 = 1$

$f'(x) = 10(2x-3)^4$

$k = 10(2\cdot 2-3)^4 = 10$

$y = kx + m$

$1 = 10\cdot 2 + m$

$m = -19$

$\underline{y = 10x - 19}$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar bestämning av tangentens ekvation. När det gäller kommunikation är lösningen möjlig att följa och förstå men det redovisas inte hur ekvationen $f(x) = 1$ lösts. Vidare framgår inte tydligt att $k = f'(2)$. Trots dessa brister anses kraven för kommunikationspoäng på C-nivå nätt och jämnt vara uppfyllda. Sammantaget ges lösningen två problemlösningspoäng och en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 18

Elevlösningsexempel 18bc.1 (1 C_M och 1 A_M)

b) $y(t) = 17{,}0 - 12{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6}(t+3)\right)$

När $\cos\left(\frac{\pi}{6}(t+3)\right) = (-1)$ befinner sig glaset så långt ifrån luckan som möjligt.

Detta sker efter 3 sekunder:

$\cos\left(\frac{\pi}{6}(3+3)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 6\right) = \cos(\pi) = (-1)$

Då blir $y(t) = 17{,}0 - 12{,}5\cos(\pi) =$

$= 17{,}0 - 12{,}5\cdot(-1) = 17{,}0 + 12{,}5 = 29{,}5$ cm från luckan.

Det tog alltså 3 sekunder för glaset att röra sig ett kvarts varv. Därför tar det $3\cdot 4 = 12$ sekunder att rotera ett helt varv.

Svar: 12 sekunder

c) Enligt beräkningarna ovan bör glaset rotera medurs

sekunder	cm från luckan
3	29,5 cm
6	17,0 cm
9	4,5 cm
12	17,0 cm

$17{,}0 - 12{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 6\right) = 29{,}5$

$17{,}0 - 12{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 9\right) = 17{,}0$

$17{,}0 - 12{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 12\right) = 4{,}5$

$17{,}0 - 12{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 15\right) = 17{,}0$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller en godtagbar lösning av deluppgift b) och c). När det gäller kommunikation saknas i b) motivering till att $t = 3$ s är första tidpunkten då glaset befinner sig längst från luckan. Detta gör att kraven för kommunikationspoäng på A-nivå inte anses uppfyllda. Sammantaget ges lösningen av deluppgift b) och c) en modelleringspoäng på C-nivå och en modelleringspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 18bc.2 (1 C_M, 1 A_M och 1 A_K)

b) Perioden $= \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 2\pi \cdot \dfrac{6}{\pi} = \underline{\underline{12\ s}}$

c) $y(0) = 17$

$y(1) = 17 - 12{,}5\cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) = 17 - 12{,}5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =$

$= 17 + 6{,}25 = 23{,}25$

Eftersom y ökar direkt efter noll måste glaset röra sig bort från luckan och då röra sig medurs.

<u>Svar:</u> medurs

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller en korrekt bestämning av perioden i b). I c) jämförs $y(1)$ med $y(0)$ och en korrekt slutsats dras om rotationsriktning. Dock saknas ett resonemang som styrker att tidsskillnaden 1 sekund är mindre än en halv period men detta anses underförstått då b)-uppgiftens lösning gav perioden 12 sekunder. Elevlösningen bedöms nätt och jämnt uppfylla kraven för modelleringspoängen på A-nivå. När det gäller kommunikation är lösningen kortfattad och i sista stycket framgår inte att ”noll” avser tidpunkten $t = 0$ s. Lösningen anses trots dessa brister nätt och jämnt uppfylla kraven för kommunikationspoäng på A-nivå.

Uppgift 22

Elevlösningsexempel 22.1 (0 poäng)

Det största värdet är 3,5, alltså inte 5. Anledningen till detta är att man inte kan addera $3 \sin x + 2 \cos x$ och få svaret 5, då den ena är sinus och den andra är cosinus.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen saknar resonemang om att sinus- och cosinuskurvorna är förskjutna eller att de har största värde för olika x-värden.

Elevlösningsexempel 22.2 (0 poäng)

Lösning $y = 3 \sin x$ och $y = 2 \cos x$

$y = 3 \sin x$ har amplituden 3

$y = 2 \cos x$ har amplituden 2

$a \sin x + b \cos x = c \sin(x + v)$

$a = 3 \quad b = 2$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Det går inte att addera amplituder utan Rasmus behöver använda sig av trigonometriska formler.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas med hjälp av formel att det största värdet är $\sqrt{13}$. Däremot saknas en förklaring utifrån graferna till varför det största värdet är mindre än 5.

Elevlösningsexempel 22.3 (1 E_R)

sin och cos ger olika värden för samma x vilket
gör att man inte kan addera 3 + 2 direkt.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller ett enkelt resonemang som ur bedömningssynpunkt anses likvärdigt med ett resonemang om att kurvorna är förskjutna i förhållande till varandra.

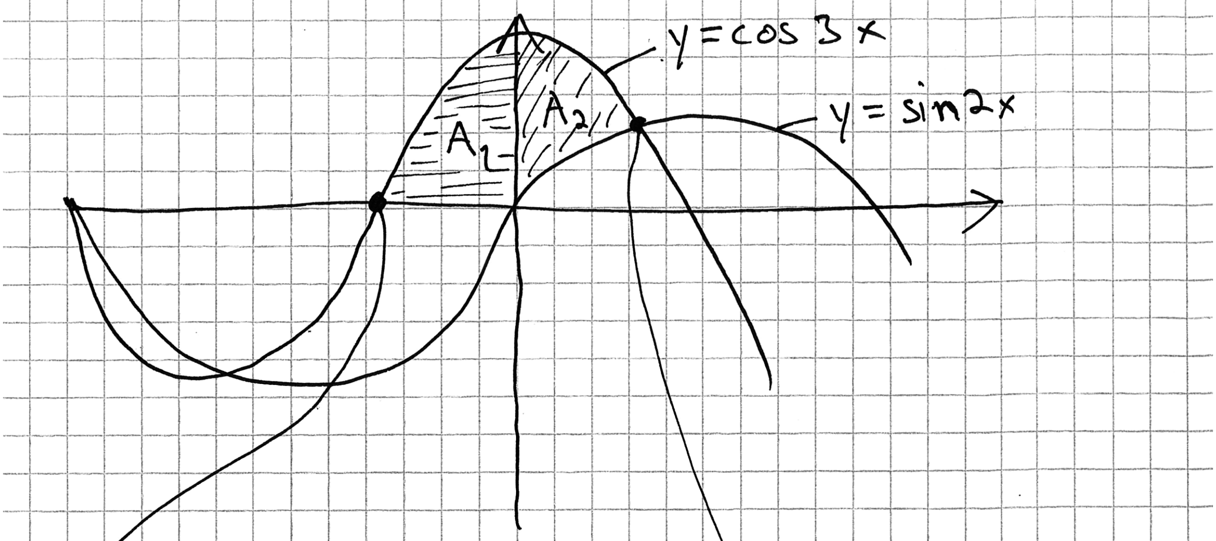
Elevlösningsexempel 22.4 (1 E_R och 1 C_R)

sinus och cosinus är vid olika lägen = 1.
Detta medför att $3\sin x + 2\cos x \neq 5$.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen konstateras att kurvorna har y-värdet 1 vid olika x-värden. Detta anses motsvara ett resonemang om att maximipunkterna infaller vid olika x-värden och därmed uppfylla kraven för resonemangspoängen på E- och C-nivå.

Uppgift 24

Elevlösningsexempel 24.1 (1 E_P)



Räknaren ger (−30, 0)

$$A_1 = \int_{-30}^{0} \cos 3x \, dx = 19{,}09$$

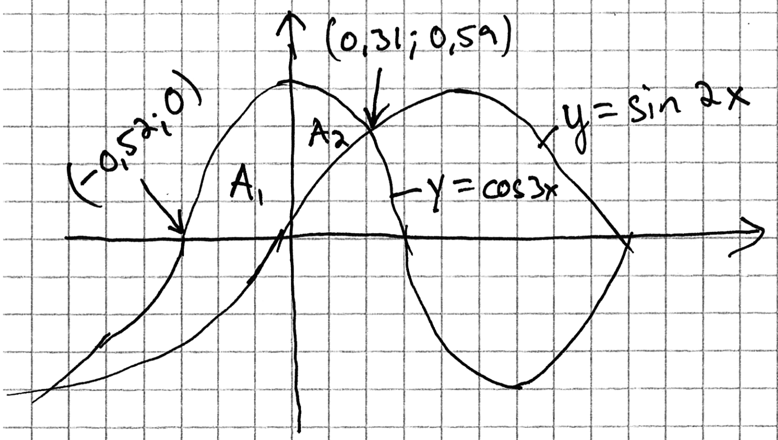
Räknaren ger (18; 0,59)

$$A_2 = \int_{0}^{18} (\cos 3x - \sin 2x)\, dx = 9{,}98$$

$A_{Tot} = A_1 + A_2 = 29{,}08$ a.e.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller en bestämning av skärningspunkterna i grader i stället för i radianer. I övrigt är bestämningen av arean godtagbar. Som helhet anses lösningen motsvara en godtagbar ansats och ge procedurpoängen på E-nivå.

Elevlösningsexempel 24.2 (1 E_P, 2 C_P och 1 C_K)



Intervall:

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Skärningspunkter

$x_1 = 0{,}31415927$

$x_2 = -0{,}52235988$

$$A_1 = \int_{-0{,}52}^{0} \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} \text{ a.e.}$$

$$A_2 = \int_{0}^{0{,}31} \cos(3x) - \sin(2x) \, dx \approx 0{,}1742 \text{ a.e.}$$

$A_1 + A_2 \approx 0{,}51$ a.e.

Svar: Arean för det skuggade området är $\approx 0{,}51$ a.e.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar bestämning av arean. När det gäller kommunikation saknas förklaring till hur skärningspunkterna bestämts, A_1 anges exakt trots avrundad integrationsgräns och parentes saknas i integranden för A_2. Trots dessa brister är lösningen möjlig att följa och förstå, bland annat eftersom figuren är tydlig och indexering av variabler används. Sammantaget anses kraven för kommunikationspoäng på C-nivå nätt och jämnt vara uppfyllda.

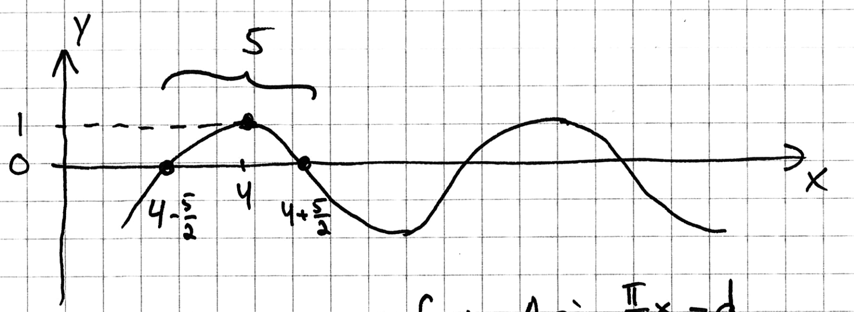
Uppgift 28

Elevlösningsexempel 28.1 (1 C_B och 2 A_{PL})

a) Period 16 cm

$$k = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$$

b)



$$f(x) = A\sin\frac{\pi}{8}x - d$$

Punkter $(1{,}5,\ 0)$ $\quad A\sin\frac{1{,}5\pi}{8} - d = 0$ $\quad d = A\sin\frac{1{,}5\pi}{8}$

$(6{,}5,\ 0)$ $\quad A\sin\frac{6{,}5\pi}{8} - d = 0$

$(4,\ 1)$ $\quad A - d = 1$

$$A - A\sin\frac{1{,}5\pi}{8} = 1$$

$$\left(1 - \sin\frac{1{,}5\pi}{8}\right)A = 1$$

$$A = \frac{1}{\left(1 - \sin\frac{1{,}5\pi}{8}\right)} \approx 2{,}25 \qquad d \approx 1{,}25$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar bestämning av de efterfrågade konstanterna. När det gäller kommunikation saknas redovisning till hur maxpunktens x-värde bestämts. Vidare framgår det inte tydligt vilka ekvationer som ger sambandet $A - A\sin\frac{1,5\pi}{8} = 1$. Dessa brister gör att kraven för kommunikationspoäng på A-nivå inte anses uppfyllda. Sammantaget ges lösningen en begreppspoäng på C-nivå och två problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 28.2 (1 C_B, 2 A_{PL} och 1 A_K)

a) Perioden: $(5+11)$ cm $= 16$ cm $\rightarrow$

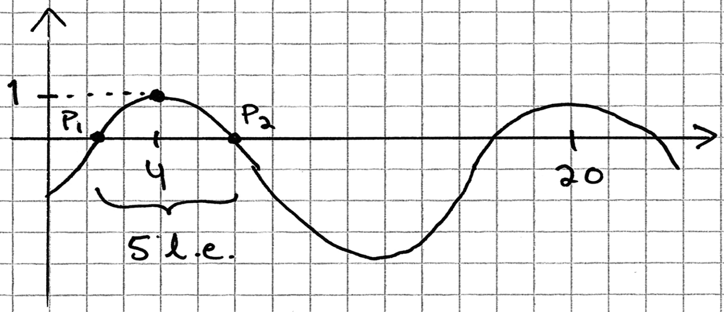
$\frac{2\pi}{k} = 16 \quad k = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$

b) $f(x) = A \sin \frac{\pi}{8}x - d$

y_{max} då $\sin \frac{\pi}{8}x = 1$

$\frac{\pi}{8}x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$

$x = 4 + n \cdot 16 \rightarrow$ Maximipunkt $(4,1)$



Avstånd mellan nollställen: 5 l.e. $\rightarrow$

P_1 har x-koordinaten $4 - \frac{5}{2} = 1{,}5$

P_2 $\quad 4 + \frac{5}{2} = 6{,}5$

$\rightarrow (1{,}5;0),\ (4,1),\ (6{,}5;0)$ är punkter på kurvan.

$$\rightarrow \begin{cases} A \sin \frac{1{,}5\pi}{8} - d = 0 & (1) \\ A \sin \frac{6{,}5\pi}{8} - d = 0 & \\ A \sin \frac{\pi}{2} - d = 1 & (3) \end{cases}$$

$(1)\ A \sin \frac{1{,}5\pi}{8} = d$

$(3)\ A \sin \frac{\pi}{2} - A \sin \frac{1{,}5\pi}{8} = 1$

$A\left(1 - \sin \frac{1{,}5\pi}{8}\right) = 1$

$\rightarrow A = \dfrac{1}{1 - \sin \frac{1{,}5\pi}{8}} \approx 2{,}25$

$\rightarrow d \approx 1{,}25$

Svar: $\begin{cases} A \approx 2{,}25 \\ d \approx 1{,}25 \end{cases}$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller en godtagbar bestämning av de efterfrågade konstanterna. När det gäller kommunikation är lösningen något otydlig när ekvation (1) och (3) slås ihop samtidigt som förenklingen $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ görs. Dessutom redovisas inte beräkningen av d på sista raden. I övrigt är lösningen lätt att följa och förstå då det finns en tydlig figur med några förklarande ord och då ekvationerna i ekvationssystemet numrerats. Sammantaget anses kraven för kommunikationspoäng på A-nivå vara uppfyllda.